

湖北省精品课程教材



工程流体力学(II)

Engineering Fluid Mechanics

赵汉中 主编

TP196

■ 华中科技大学出版社

工程流体力学

(II)

赵汉中 主编

华中科技大学出版社

内 容 简 介

本书介绍流体力学的基本原理及其在工程中的应用,是为热能与动力以及环境工程类专业学科基础课程“工程流体力学(Ⅱ)”而编写的教材。内容包括理想不可压缩流体的势流和旋涡运动、粘性不可压缩流体的运动、激波与膨胀波以及流动传输基础等。书中对每部分讲述内容都列举了示范例题,配置了较多的练习题,并编写了思考题,书末附有习题答案。

本书可作为工程类专业本科生的教材,也可供研究生和工程技术人员参考。

前 言

本书是热能与动力以及环境工程类专业本科生“工程流体力学(Ⅱ)”课程的教材,并先后入选“华中科技大学百门精品课程教材”和“湖北省精品课程教材”。在编写过程中,我们参考了2004年教育部水力学和流体力学教学指导小组制定的《工程流体力学课程教学基本要求》及其他参考文献。

流体力学是一门基础学科,也是一门应用学科。“工程流体力学”是许多工程专业的重要学科基础课程。热能与动力以及环境工程专业的学生需要在学习“工程流体力学(Ⅰ)”课程后进一步学习“工程流体力学(Ⅱ)”课程。本书为满足上述教学要求而编写。教学不仅要传授知识,更要注重培养学生的能力,提高学生的素质。这是我们在教学实践中努力的方向,也是编写教材的指导思想。在本书编写中,我们力求做到突出物理概念和基本原理,强调解决问题的一般方法,落脚于实际工程问题。为了有利于学生自主学习,本书对每部分讲述内容都列举了示范例题,配置了较多的练习题,并编写了思考题。

本书在使用多年的教材基础上,由三位具有丰富教学经验和教材编写经验的教师合作编写,在制定编写大纲的过程中广泛地征求过相关专业教师的意见。各章的编写分工为:李万平编写第7章,赵汉中编写第8章、第9章,李国栋编写第10章。全书由赵汉中统稿。

本书在编写和出版过程中得到了华中科技大学教务部门和华中科技大学出版社的大力支持。

编 者

2005年7月

主要符号

A	面积
$\boldsymbol{a}$	加速度矢量
a_x, a_y, a_z	加速度分量
B, b	宽度
C	浓度
C_f	摩擦阻力系数
C_p	压强系数
c_p	(质量)定压热容
c_v	(质量)定容热容
c	声速, 水击波波速
D	直径, 扩散系数
d	直径
E	能量, (固体)弹性模量
e	(质量)内能
Eu	欧拉数
$\boldsymbol{F}$	力矢量
F	力
F_D	摩擦力
Fr	弗劳德数
$\boldsymbol{f}$	单位质量力矢量
f	频率
f_x, f_y, f_z	单位质量力分量
G	重量
g	重力加速度
H	高度
h	高度, 距离, (质量)焓
J_x, J_y, J_z	扩散质量通量
K	体积模量
L, l	长度
m	质量
M	力矩
Ma	马赫数

P	功率
p	压强
p_a	大气压强
p_g	表压强
p_v	真空压强
Q, q	体积流量
Q_m	质量流量
R	半径, 气体常数
Re	雷诺数
Sr	斯特劳哈尔数
T	热力学温度
t	时间, 摄氏温度
U	速度
u, v, w	速度分量
V	体积, 平均速度
$\mathbf{v}$	速度矢量
W	功, 复位势
α	角度
β	角度
Γ	速度环量
γ	绝热指数
Δ	壁面粗糙度
δ	边界层厚度, 粘性底层厚度
ε	截面收缩系数, (固体) 应变
ζ	局部阻力系数
λ	沿程阻力系数
μ	动力粘度, 流量系数, 马赫角
ν	运动粘度, 普朗特-迈耶函数
Π	力势函数, 无量纲综合参数
θ	角度
ρ	密度
σ	正应力, 表面张力系数
τ	切应力
φ	速度势函数
ψ	流函数
Ω	涡量
ω	角速度
$\boldsymbol{\omega}$	角速度矢量

目 录

主要符号	(i)
第 7 章 理想不可压缩流体的势流和旋涡运动	(1)
7.1 流体微团的运动分析	(1)
7.2 速度环量与旋涡强度	(7)
7.3 旋涡运动的基本概念	(10)
7.4 不可压缩流体势流的基本求解方法	(14)
7.5 基本的平面有势流动	(23)
7.6 平面势流的叠加	(31)
7.7 不可压缩流体基本轴对称势流及其叠加	(38)
小结	(43)
思考题	(44)
习题	(45)
第 8 章 粘性不可压缩流体的运动	(49)
8.1 粘性流体中的应力	(49)
8.2 不可压缩粘性流体运动的基本方程	(53)
8.3 纳维-斯托克斯方程(N-S 方程)的解析解	(56)
8.4 层流边界层流动的基本方程	(63)
8.5 平板层流边界层的相似性解	(67)
8.6 边界层动量积分方程	(71)
8.7 湍流边界层与混合边界层	(75)
小结	(78)
思考题	(79)
习题	(80)

第9章 激波与膨胀波	(83)
9.1 正激波	(83)
9.2 斜激波	(88)
9.3 膨胀波	(96)
小结	(100)
思考题	(101)
习题	(102)
 第10章 流动传输基础	(104)
10.1 流体中的质量传输	(104)
10.2 扩散方程及传输方程	(104)
10.3 静止流体中的扩散	(109)
10.4 直线均匀流场中的随流传输	(118)
小结	(121)
思考题	(121)
习题	(122)
 附录 柱坐标系和球坐标系下的常用公式	(123)
习题答案	(126)
参考文献	(128)

第7章 理想不可压缩流体的势流和旋涡运动

真实流体都是有粘性的,但是当粘性力对运动的影响相对较小时,一般就可以在分析中忽略粘性力。对于许多不能忽略粘性影响的流体运动问题,也经常先采用无粘性的流体模型来研究运动的一些基本规律,然后在此基础上研究流体粘性的影响。理想流体是忽略了流体粘性影响的一种简化的力学模型。

本章将首先分析流体的运动,然后根据运动所具有的不同特点,将它们分为有旋流动和无旋流动。无旋流动又称为有势流动或简称为势流。由于流体的粘性力是产生旋涡运动的重要原因之一,因此在理想流体中才存在着有势流动。本章还将介绍不可压缩流体平面势流和轴对称势流问题的求解方法。不可压缩流体的势流理论也是经典流体力学中发展最充分、内容最丰富的部分之一。

7.1 流体微团的运动分析

刚体的一般运动可以分解为相对于参考点的平移运动和绕瞬时转动轴的旋转运动。流体微团在运动过程中不仅有平移和转动,它还具有与刚体不同的另一种运动形式,即变形。变形又可以分解为线变形和角变形两部分。因此,流体微团的一般运动可以分解为四部分,即整体的平移运动、绕自身瞬时转动轴的旋转运动、线变形运动和角变形运动。

1. 速度的分解

在运动流体中任意取一边长为 Δx 、 Δy 、 Δz 的平行六面体微团,如图7-1所示。假设微团上点 $A(x, y, z)$ 的速度为 (u, v, w) ,点 $G(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ 的速度为 (u_G, v_G, w_G) ,那么,点 G 的三个速度分量可以用对点 A 的泰勒级数展开式表示为

$$u_G = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$$

$$v_G = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z$$

$$w_G = w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z$$

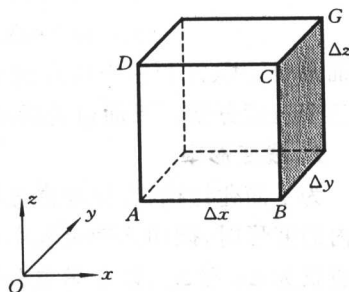


图7-1 平行六面体流体微团

把上面三个式子改写成

$$u_G = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta y$$

$$v_G = v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Delta z$$

$$w_G = w + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Delta y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta x$$

再引进下列符号:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.1a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.1b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.1c)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (7.2a)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (7.2b)$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.2c)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (7.3a)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (7.3b)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.3c)$$

点G的三个速度分量最后写为

$$u_G = u + \epsilon_x \Delta x + (\gamma_y \Delta z + \gamma_z \Delta y) + (\omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y) \quad (7.4a)$$

$$v_G = v + \epsilon_y \Delta y + (\gamma_z \Delta x + \gamma_x \Delta z) + (\omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z) \quad (7.4b)$$

$$w_G = w + \epsilon_z \Delta z + (\gamma_x \Delta y + \gamma_y \Delta x) + (\omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x) \quad (7.4c)$$

显而易见,式(7.4)三个表达式中等号右边的第一项 u 、 v 、 w 是流体微团整体平移运动的三个速度分量。下面讨论后面三项的意义。

2. 线变形率

为了简化讨论,首先考虑微团在 xOy 投影平面内的变形。在未考虑它在其他投影平面内的变形时,微团运动过程中点G的投影始终与点C重合。在 xOy 投影平面内,微团的边长为 Δx 和 Δy ,四个角点分别为点A、B、C、D; Δt 时刻后微团的形状和位置都发生了改变,四个角点运动到点A'、B'、C'、D',如图7-2所示。

在点D和点C上, x 方向的速度分量分别为 $u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$ 和 $u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$ 。由于点D和点C的速度不同,在流体运动过程中,线段DC在 x 方向的投影长度会发生变化。设 Δt 时刻内其投影长度的变化为 ΔL_x ,它可以由点D和点C在 x 方向的速度表示为

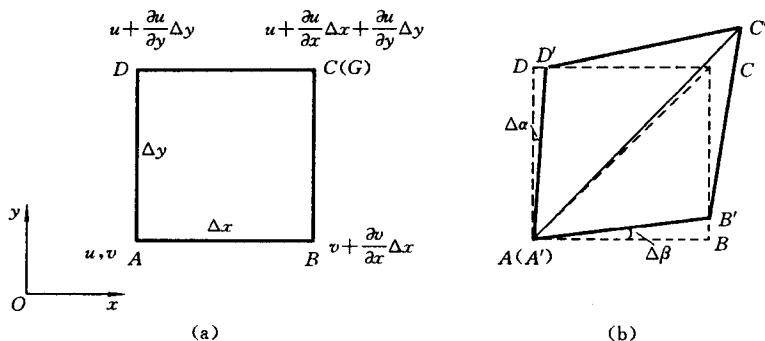


图 7-2 流体微团的运动和变形

(a) 变形前 (b) 变形后

$$\Delta l_x = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) \Delta t = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

由于线变形而在点C所产生的x方向的速度就是线段DC在单位时间内x方向投影长度的变化,它又表示为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l_x}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x = \epsilon_x \Delta x$$

这就是式(7.4a)右边的第二项。由于点G(参见图7-2)的投影始终与点C重合,因此 $\epsilon_x \Delta x$ 就是微团在x方向的线变形在点G所产生的x方向的速度。用同样的方法可以说明,式(7.4b)和式(7.4c)中的 $\epsilon_y \Delta y$ 和 $\epsilon_z \Delta z$ 分别是流体微团在y和z方向的线变形在点G所产生的y、z方向的速度。式(7.1)所定义的 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 是单位时间内流体在x、y、z方向的长度相对变化,分别称为x、y、z方向的线变形率。

定义 $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$,由式(7.1)知

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

ϵ 称为流体的体积变形率。对于不可压缩流体的运动,根据第3章建立的连续性方程(3.15),有

$$\epsilon = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

要使不可压缩流体的运动满足质量守恒定律,任意流体微团的体积变形率必须等于零。

3. 角变形率

仍然在xOy平面上分析微团的运动。参照图7-2,点B上y方向的速度分量为 $v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$,点D上x方向速度分量为 $u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$,与点A上相应方向的速度分量v和u都不相同,所以微团上线段AB和线段AD的方向会发生改变。假设线段AB逆时针方向旋转了 $\Delta\beta$,线段AD顺时针方向旋转了 $\Delta\alpha$,由于微团在 Δt 时刻内的变形角度很小,因此 $\Delta\beta$ 和 $\Delta\alpha$ 可以

分别表示为

$$\Delta\beta = \tan\Delta\beta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - v\Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$$

$$\Delta\alpha = \tan\Delta\alpha = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t - u\Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t$$

当 $\Delta\beta$ 和 $\Delta\alpha$ 的大小不一样时,微团不仅有角变形还有整体的旋转,于是可以把微团的变形分解为角变形和旋转两个部分,如图7-3所示。单位时间内的角变形就是 $\angle DAB$ 的变化,它表示为

$$\frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{\Delta t} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\gamma_z$$

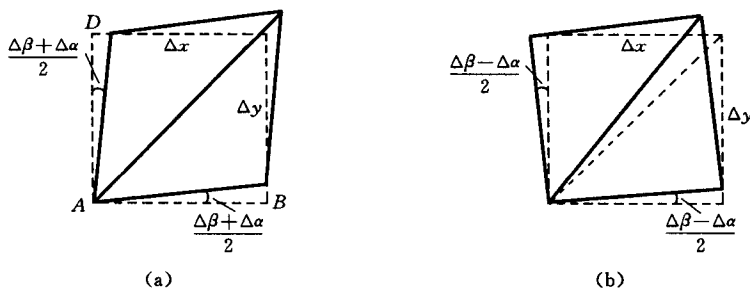


图 7-3 流体微团的角变形和旋转

(a) 角变形 (b) 旋转

线段 AD 顺时针方向的旋转会使点 C 上 x 方向速度增加,其增加量为 $\gamma_z\Delta y$ 。这也就是微团在 xOy 投影平面内的角变形在点 G 上所产生的 x 方向速度增量。同样道理,微团在 xOz 投影平面内的角变形也会使点 G 上 x 方向速度产生改变,其变化为 $\gamma_y\Delta z$ 。因此,由于微团角变形使点 G 所产生的 x 方向速度的改变量一共是 $\gamma_y\Delta z + \gamma_z\Delta y$ 。同样可以说明,微团角变形使点 G 上 y 、 z 方向速度的改变量分别为 $\gamma_z\Delta x + \gamma_x\Delta z$ 和 $\gamma_x\Delta y + \gamma_y\Delta x$ 。比较式(7.4)就知道,它们分别是三个表达式中的第三项。

式(7.2)所定义的 γ_x 、 γ_y 、 γ_z 是流体微团在单位时间内分别在 yOz 、 xOz 、 xOy 投影平面内的角变形。角变形又称为剪切变形,因此 γ_x 、 γ_y 、 γ_z 称为角变形率或剪切变形率。

三个线变形率分量和三个角变形率分量完全描述了流体中任意微团的变形率(即单位时间内的变形)。在绝大多数流体中,粘性应力与变形率之间成正比关系。下一章将会建立它们之间的关系。

4. 旋转角速度

由图7-3可以看出,整个流体微团 Δt 时间内在 xOy 平面内逆时针方向旋转的角度为 $(\Delta\beta - \Delta\alpha)/2$,这使点 G 上 x 方向的速度变化了

$$-\frac{\Delta\beta-\Delta\alpha}{2\Delta t}\Delta y=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y=-\omega_z\Delta y$$

再加上微团在 xOz 平面内的旋转所产生的 x 方向的速度变化,微团旋转使点 G 所产生的 x 方向速度变化为 $\omega_y\Delta z-\omega_z\Delta y$ 。

同样道理,微团旋转所产生的 y 、 z 方向的速度分量分别为 $\omega_z\Delta x-\omega_x\Delta z$ 和 $\omega_x\Delta y-\omega_y\Delta x$ 。这就是式(7.4)等号右边的第四项。可见, ω_x 、 ω_y 、 ω_z 是流体微团单位时间内分别在 yOz 、 xOz 、 xOy 投影平面内的旋转角速度。可以用三个旋转角速度分量组成一个矢量,即

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

根据式(7.3)的定义,又可以把矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示成

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{v}) \quad (7.5)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}$ 称为旋转角速度矢量, $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 是速度的旋度。旋转角速度矢量与微团的瞬时转动轴同线,其正方向由右手螺旋规则确定,如图 7-4 所示。

在柱坐标下,旋转角速度的三个分量表示为

$$\omega_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \quad (7.6a)$$

$$\omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (7.6b)$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) \quad (7.6c)$$

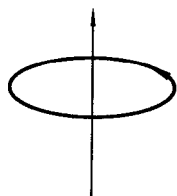


图 7-4 旋转角速度矢量的方向

至此,已经证明了流体微团的一般运动可以分解为平移运动、旋转运动、线变形和角变形。速度分解对于流体力学理论的发展具有重要的意义。由于把旋转运动从一般运动中分离出来,所以才有可能把运动分类为无旋运动和有旋运动,从而可以对它们分别进行研究;由于把流体的变形运动从一般运动中分离出来,所以才有可能将流体的变形率与流体中的粘性应力联系起来。

5. 有旋流动和无旋流动

所有流体微团都没有旋转运动的流动称为无旋流动。对于无旋流动,每一流体微团的旋转角速度都等于零,因此在流场中的每一点都有

$$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$$

根据式(7.3)对于 ω_x 、 ω_y 和 ω_z 的定义,无旋条件还可以表示为

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z} \quad (7.7a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.7b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.7c)$$

流动有旋时,流体的某些微团(或者质点)有旋转运动,其旋转角速度不为零。在有旋流动中,流体质点的运动轨迹并不一定是曲线;在无旋流动中,流体质点的运动轨迹也不一定是直线。流体微团是否有自身的旋转运动与它们的运动轨迹是直线还是曲线是两个不同的概念。下面两个例子能够很好地说明这一点。

例 7-1 给定速度场 $u=ky, v=0, w=0$, 分析流体质点的运动轨迹, 并判断该速度场所定义的流动是有旋的还是无旋的。

解 只有 x 方向的速度分量不等于零, 所有流体质点的运动轨迹都是与 x 轴平行的直线。这种流动也称为平行直线流动。由所给速度计算旋转角速度, 可得

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{k}{2}$$

由于 ω_z 不等于零, 所以是有旋流动。所有的流体质点都沿着直线运动, 在运动过程中质点还不断地以角速度 $k/2$ 沿顺时针方向自转。在流场中任取一矩形微团 $ABCD$, 如图 7-5 所示, 微团运动一段距离后成为 $A'B'C'D'$ 。由于 x 方向的速度由下至上逐步增加, 所以微团 $A'B'C'D'$ 相对于原来的微团 $ABCD$ 不仅发生了角变形, 还沿顺时针方向旋转了一定的角度。

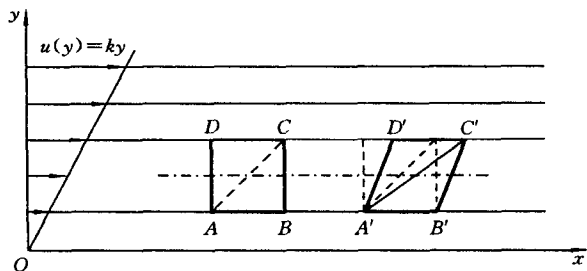


图 7-5 在平行直线流中的有旋流动

例 7-2 给定速度场 $u = -\frac{y}{x^2+y^2}, v = \frac{x}{x^2+y^2}, w=0$, 分析流体质点的运动轨迹并判断该速度场定义的流动是有旋的还是无旋的。

解 为了分析流体微团(或质点)的运动轨迹, 把直角坐标系中的速度分量 u, v, w 转换为柱坐标系中的速度分量 v_r, v_θ, v_z , 即

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta = 0, \quad v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta = \frac{1}{r}, \quad v_z = w = 0$$

只有 θ 方向的速度分量不等于零。可见, 流体质点的运动轨迹是一族以坐标 z 轴为圆心的圆周。

计算旋转角速度, 有

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

三个角速度分量都等于零,流动无旋。流体质点在做圆周运动的过程中并没有发生自转,如图7-6所示。流体质点的这种运动类似于游乐场摩天轮上乘客的运动,当摩天轮巨大的转轮绕水平轴旋转时,悬挂在轮周上的座椅都绕水平轴做旋转运动,座椅上的乘客头始终向上,脸朝着一个不变的方向。乘客的运动轨迹是圆周,但并没有发生自转。

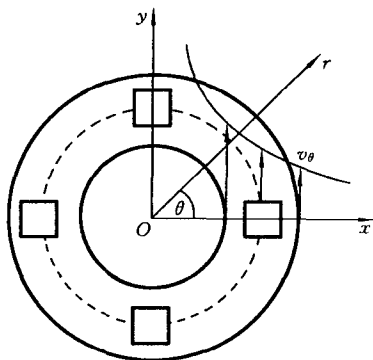


图7-6 流体质点做圆周运动时的无旋流动

7.2 速度环量与旋涡强度

1. 速度环量

在流场中任取封闭曲线 L , 如图7-7所示。设曲线上任意一点的速度矢量为 $\mathbf{v}$, 沿曲线取微元矢量 $d\mathbf{s}$, 沿封闭曲线 L 的积分 $\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ 称为绕 L 的**速度环量**。速度矢量与微元矢量的点乘 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ 是沿着曲线 L 的切向速度分量与微元弧长的乘积, 因此速度环量是切向速度沿封闭曲线的积分。

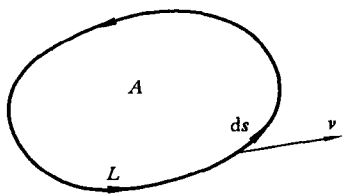


图7-7 沿封闭曲线的速度环量

速度环量记为 Γ 。矢量 $\mathbf{v}$ 和 $d\mathbf{s}$ 可以分别表示为分量形式 $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 和 $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, 根据矢量点乘的运算法则, 有

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = udx + vdy + wdz$$

因此速度环量还可以表示为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L udx + vdy + wdz \quad (7.8)$$

按照惯例, 规定逆时针方向的线积分为正。也就是说, 沿着曲线正方向行进时, 曲线所围区域总是在左边。

例7-3 不可压缩流体平面流动的速度分布为 $u = -6y, v = 8x$, 求绕圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的速度环量 Γ 。

解 速度环量

$$\Gamma = \oint_L (udx + vdy) = \oint_L (-6ydx + 8xdy)$$

积分路径在圆周上, 由于圆周半径等于1, 故沿着圆周 $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ 。把它们代入上式后可以积分如下:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \int_0^{2\pi} -6\sin\theta d(\cos\theta) + \int_0^{2\pi} 8\cos\theta d(\sin\theta) \\
 &= \int_0^{2\pi} 6\sin^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} 8\cos^2\theta d\theta \\
 &= 6\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\bigg|_0^{2\pi} + 8\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\bigg|_0^{2\pi} \\
 &= 6(\pi - 0) + 8(\pi - 0) = 14\pi
 \end{aligned}$$

2. 旋涡强度

速度矢量的旋度为**涡量**。涡量是个矢量,记为 Ω 。由式(7.5)知, $\omega = (\nabla \times \mathbf{v})/2$,因此涡量可以被表示为

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} = 2\omega \quad (7.9)$$

在流场中取任意面积 A ,设面积 A 上任意一点的涡量为 Ω ,面积的法向单位矢量为 $\mathbf{n}$,积分 $\int_A \Omega \cdot \mathbf{n} dA$ 称为面积 A 的**旋涡强度**。旋涡强度类似于体积流量,体积流量表示单位时间内通过指定面积的流体体流量,旋涡强度则表示单位时间内通过指定面积的流体旋涡量。正因如此,旋涡强度有时也称为**涡通量**。旋涡强度记为 I ,根据定义它可以表示为

$$I = \int_A \Omega \cdot \mathbf{n} dA = 2 \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dA = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.10)$$

对于平面流动,取坐标系 xOy 。此时流体只可能在 xOy 平面内做有旋运动,故只有 ω_z 可能不等于零,对于 xOy 平面上的任意面积 A ,旋涡强度

$$I = 2 \int_A \omega_z dA \quad (7.11)$$

例7-4 不可压缩流体平面流动的速度分布为 $u = -6y, v = 8x$,求圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 所围面积 A 上的旋涡强度 I 。

解 旋转角速度

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (8 + 6) = 7$$

在面积 A 上旋涡强度

$$I = 2 \int_A \omega_z dA = 2 \times 7\pi = 14\pi$$

3. 斯托克斯(Stokes)定理

如果 A 是封闭曲线 L 所围的单连通区域, $\mathbf{n}$ 是面积 A 的法向单位矢量, $\mathbf{R}$ 是区域中的任意空间矢量,数学中斯托克斯定理给出线积分与面积积分的关系式如下:

$$\oint_L \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} dA$$

速度矢量 $\mathbf{v}$ 是空间矢量,由斯托克斯定理以及速度环量和旋涡强度的定义可以得到以下关系式:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Omega \cdot \mathbf{n} dA = I \quad (7.12)$$

也就是说,沿封闭曲线 L 上的速度环量 Γ 与所围单连通区域 A 上的旋涡强度 I 之间具有等量关系。斯托克斯定理中的 A 可以是平面面积,也可以是空间曲面面积,如图7-8所示。

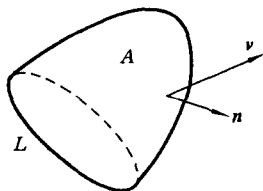


图7-8 沿空间曲面边界的速度环量

根据斯托克斯定理,可以通过计算速度环量来确定面积上的旋涡强度,在很多情况下这可以使相关计算更为方便。从数学角度看,速度环量是速度的线积分,旋涡强度是速度偏导数的面积分,相比之下,速度环量 Γ 更易于计算;在实际研究中,要计算速度环量 Γ 只需测量流场中曲线 L 上的速度分布,要计算旋涡强度 I 则必须测量整个面积 A 上的速度分布。

当流动无旋时,流场中所有点的旋转角速度矢量 ω 都等于零,所以流场中任意面积上的旋涡强度等于零,由斯托克斯定理知,此时绕单连通区域内任意封闭曲线的速度环量也等于零。

下面以龙卷风为例进一步说明速度环量和旋涡强度的物理意义。

龙卷风是大气热对流与地转运动结合而产生的强烈旋转气流。龙卷风的中心部分称为涡核区,涡核区内的气体像刚体一样绕着中心轴旋转。设龙卷风的旋转角速度为 ω ,采用柱坐标,涡核区内的圆周切向速度为 $v_\theta = r\omega$ 。涡核区外面的空气在旋转涡核的带动下一起旋转,涡核的带动作用随着与涡核距离的增大而衰减,因此涡核区外的圆周切向速度与 r 成反比,可以表示为 $v_\theta = I/2\pi r$,其中 I 是涡核截面上的旋涡强度。

例7-5 测出龙卷风旋转角速度 $\omega = 2.5 \text{ rad/s}$,风区最大风速 $v_{\max} = 50 \text{ m/s}$ 。求整个龙卷风区域的风速分布,并指出有旋流动区域和无旋流动区域。

解 设龙卷风涡核截面上的旋涡强度为 I ,涡核区半径为 R ,任意一点到涡核中心的距离为 r 。在涡核区 $r < R$ 内,流体速度分布为 $v_\theta = r\omega$;在涡核区 $r > R$ 外,速度分布为 $v_\theta = I/2\pi r$ 。由两个区域的速度表达式可以看出,最大速度发生在涡核区的外缘,即 $r = R$ 处。由涡核区速度表达式得

$$R = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{50}{2.5} \text{ m} = 20 \text{ m}$$

根据斯托克斯定理,涡核截面上的旋涡强度 I 等于绕 $r = R$ 的圆周线的速度环量 Γ ,因此

$$I = \Gamma = 2\pi R v_{\max} = 2\pi \times 20 \times 50 \text{ m}^2/\text{s} = 2\,000\pi \text{ m}^2/\text{s}$$

核外区域的流体速度

$$v_\theta = \frac{I}{2\pi r} = \frac{2\,000\pi}{2\pi r} \text{ m/s} = \frac{1\,000}{r} \text{ m/s}$$

整个风区的风速分布为

$$v_\theta = \begin{cases} 2.5r \text{ m/s}, & r \leq 20 \text{ m} \\ \frac{1\,000}{r} \text{ m/s}, & r \geq 20 \text{ m} \end{cases}$$