代数二

遵循新大纲　配合新教材

新编精解本

初中数学万题选

（第三版）

初二适用

中国人民大学附属中学
北京大学附属中学
北京市第四中学　　合编
北京师范大学附属实验中学
清华大学附属中学

北京大学出版社

遵循新大纲　配合新教材

初中数学万题选

（新编精解本）

代数（二）

（初二适用）

中国人民大学附属中学
北京大学附属中学
北京市第四中学　合编
北京师范大学附属实验中学
清华大学附属中学

方振寰　袁鑫　刘连璞　改编

北京大学出版社
·北　京·

书　　　名：初中数学万题选（新编精解本）·代数（二）
著作责任者：中国人民大学附属中学等五校　合编
责 任 编 辑：瞿　定
标 准 书 号：ISBN 7-301-03358-3/G·401
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：高新特公司激光照排中心
印　刷　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092　32 开本　9.625 印张　216 千字
2000 年 6 月第 3 版　2000 年 7 月第 2 次印刷
定　　　价：11.00 元

第三版说明

《初中数学万题选》(第二版)自1997年再版以来,多次重印,深受广大中学数学教师、学生及学生家长的喜爱。许多中学生来信谈到使用这套题选后,激发了学习数学的兴趣,基础扎实了,数学成绩有了很大提高,这使我们深感欣慰。但在读者来信中也反映了这套题选题量偏大,某些同类型题目数量偏多;有些练习题偏难,同学做题有困难;个别题超纲等。我们仔细研究了读者的来信,并根据教育部减轻中学生课业负担的精神,我们聘请具有丰富教学经验的有关的代数、几何专家对第二版内容作了较大的修改。

现在的第三版是新编精解本,它是根据最新教学大纲要求,并与现行初中数学统编教材同步,突出了每章按知识要点、基本要求给出典型例题,总结出解题规律;精题精解,重新把练习题进行了归纳、分类、整理,精简同类型题、删去超纲题,对难题、综合题加"*"号并给出详细解答。本书注重启发思维,强调基础训练、解题思路、数学的思想方法及应用。它更适合当前的初中数学的教学要求,是一本优秀的中学数学教学参考书。

这次新编精解本的改编工作是在北京大学数学科学学院姚孟臣先生的组织和指导下进行的,刘连璞、方振寰、袁鑫三位老师承担了具体、精细的改编工作,他们为此付

出了辛勤的劳动。在此，我们向他们表示衷心地感谢。

为使这套题选不断完善，并在初中数学教学中作为一本优秀数学参考书更好地发挥作用，我们热忱希望中学数学教师、学生及学生家长提出宝贵意见。

北京大学出版社

2000年5月20日

第二版说明

《初中数学万题选》(共五册)自 1994 年问世以来,多次印行,深受广大中学数学教师、学生及学生家长喜爱,并以优良的品质在第三届全国教育图书订货会被评选为优秀图书。

《初中数学万题选》面世后,众多读者来信表示非常喜爱此套题选,这使我们深感欣慰。尤其让我们感动的是,一些细心的读者在使用这套题选时,将他们的体会告诉我们,指出了其中的差错和不足之处,并提出了修改意见。这也是促使我们进行第二版工作的原因之一。原因之二,则是为了适应国家教委新颁初级中学数学教学大纲及新编统编教材。第二版保留了第一版的精要和框架,对一些内容进行了适当的增删和调整,对第一版中的谬误进行了订正,并根据读者的建议,对书中较难的计算题与证明题给出关键步骤的提示。第二版的目的,一是为了与现行统编的教材同步,便于教师选题、学生自测、家长辅导,二是为了更加方便校外读者使用本题选,特别是家长检查、辅导。

这次再版工作是在北京大学数学系姚孟臣先生的组织和指导下进行的。刘连璞、王秋芳两位老师承担了具体的、精细的修订工作。在此,我们向他们表示衷心地感谢!

为了使这套题选不断完善,并在数学普及教育中更好地发挥作用,我们热忱希望读者朋友和社会各界人士提出

改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为中国的教育事业服务，为进一步提高我国的数学教育水平作出我们的努力。

北京大学出版社数理编辑室

1996年12月

前　言

著名数学大师苏步青教授在论述数学学习方法时曾经说过："学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，通过自己独立思考，在演算过程中弄清基本概念和定义，这是一项非常重要的基本功。"本着加强初中数学基本功训练之目的，同时也为了更好地向教师和学生家长提供有代表性的训练习题，以辅导学生真正学好并灵活运用数学知识，提高解决问题的能力，我们组织力量精心编选了这套《初中数学万题选》系列图书。

本套书由中国人民大学附属中学、北京大学附属中学、北京市第四中学、北京师范大学附属实验中学、清华大学附属中学等五所重点学校的特、高级数学教师，集多年执教积累的丰富经验编写而成。全书共编选15000余道题，其中自命题占了相当大的比例。这些自命题是上述五校特、高级数学教师及有关专家多年的智力精华，是我国中学数学教学的宝贵财富。

全书共分五册，其中代数三册，收入约11000题；几何两册，收入约4000题。

本套书与一般习题集的根本区别在于：其总体结构由北京大学等有关方面的专家根据教育学、心理学原理先行设计，形成命题要求，然后五校特、高级教师和有关方面的专家按要求严格命题，最后经命题教师自检、互检，再经专家检验、总体检验等多种校验审定。这种命题过程在我国课外教学读物的编写中尚不多见，也使得本套书中题目的各项指标，如认知层次，难度、区分度等更趋合理。

与一般习题集相比，本套书还具有如下特色，即题量大，覆盖面广，初中数学的内容已基本囊括其中。

题型配备齐全，也是本套书的一个突出特点。给同样的考核内容赋予新颖多样的考核方式，有助于拓展学生的思维，帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。本书尤其注重对选择、填空和判断是非等标准化题型的训练，使学生基础知识和基本技能的掌握达到事半功倍的效果。章、节后均配备了适量的综合题和竞赛练习题，旨在启迪学生智力的自我开发与提高。每册最后附有参考答案与提示，有助于学生自查或家长家庭辅导与检查。

由于本套书中题目的难度及认知层次分布合理，使本书具有难易得当、适应性广的特点，而不是难题、怪题的集汇，各级各类学校均可根据自身的情况选择使用，是教师测试学生的标准化样本。

感谢北京市教育局教研部的有关数学专家，他们对本套书的设计和编写提出了很多指导性意见，使本书大为增色。

囿于编者水平，书中疏漏、错误之处在所难免，热忱希望读者斧正。

编选组

1994年1月

目　录

第八章　因式分解

一、知识要点

1. 因式分解的定义.

2. 因式分解的方法：

(1) 提公因式法.

(2) 运用公式法.

(3) 十字相乘法.

(4) 分组分解法.

(5) 配方法.

二、基本要求

1. 了解因式分解的意义及其和整式乘法间的联系与区别.

2. 学会提公因式法、运用公式法、十字相乘法和分组分解法这四种分解因式的基本方法，能灵活运用它们进行因式分解.

3. 学会配方法.

4. 分解因式时，要分解到不能再分解为止.

典型例题

例 1　多项式 x^2+ax+b 因式分解为 $(x+1)(x-2)$，求 $a+b$ 的值.

分析　根据因式分解的概念可知因式分解是一种恒等变

形，而恒等式中的对应项系数是相等的，从而可以求出 a 和 b，于是问题便得到解决.

解 由题意得：$x^2+ax+b=(x+1)(x-2)$，所以

$$x^2+ax+b=x^2-x-2,$$

从而得出 $$a=-1,\ b=-2,$$

所以 $$a+b=(-1)+(-2)=-3.$$

点评 “恒等式中的对应项系数相等”这一知识是求待定系数的一种重要方法.

例 2 因式分解 $6a^2b+4ab^2-2ab$.

分析 此多项式的各项都有因式 $2ab$，提取 $2ab$ 即可.

解 $6a^2b+4ab^2-2ab=2ab(3a+2b-1)$.

点评 用“提公因式法”分解因式，操作时应注意这样几个问题：首先，所提公因式应是各项系数的最大公约数与相同字母最低次幂的乘积，即提取的公因式应是多项式各项的**最高**公因式，否则达不到因式分解的要求；其次，用“提公因式法”分解因式，所得结果应是：最高公因式与原多项式各项分别除以最高公因式所得商式的乘积. 如果原多项式中的某一项恰是最高公因式，则商式为 1，这个 1 千万不能丢掉.

本例题中，各项的公因式有 $2,a,b,2a,2b,ab,2ab$ 等. 其中 $2ab$ 是它们的最高公因式，故提取 $2ab$. 作为因式分解后的一个因式，另一个因式则是分别用 $6a^2b$，$4ab^2$ 和 $-2ab$ 除以 $2ab$ 所得的商式代数和，其中 $-2ab\div 2ab=-1$，这个 -1 不能丢.

例 3 因式分解 $m(x+y)+n(x+y)-x-y$.

分析 将 $-x-y$ 变形为 $-(x+y)$，于是多项式中各项都有公因式 $x+y$，提取 $x+y$ 即可.

解 $m(x+y)+n(x+y)-x-y$

$=m(x+y)+n(x+y)-(x+y)$

$=(x+y)(m+n-1)$.

点评 注意添、去括号法则.

例 4 因式分解 $64x^6-1$.

分析 $64x^6$ 可变形为 $(8x^3)^2$，或变形为 $(4x^2)^3$，而 1 既可看作 1^2，也可看作 1^3，这样，本题可先用平方差公式分解，也可先用立方差公式分解.

解 **方法一**

$$\begin{aligned}64x^6-1&=(8x^3)^2-1=(8x^3+1)(8x^3-1)\\&=[(2x)^3+1][(2x)^3-1]\\&=(2x+1)(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1).\end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}64x^6-1&=(4x^2)^3-1\\&=(4x^2-1)(16x^4+4x^2+1)\\&=(2x+1)(2x-1)(16x^4+8x^2+1-4x^2)\\&=(2x+1)(2x-1)[(4x^2+1)^2-(2x)^2]\\&=(2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1).\end{aligned}$$

点评 在分解因式时，尽管采用的方法不同，但结果应是相同的. 本题的两种解法，显然第一种方法比较简单.

例 5 因式分解 $2m^3+\frac{1}{4}n^3$.

分析 从表面上看，本题中的两项都不是完全立方，但如果先提取系数 2 或 $\frac{1}{4}$，则形式便发生了变化.

解 $$\begin{aligned}2m^3+\frac{1}{4}n^3&=\frac{1}{4}(8m^3+n^3)\\&=\frac{1}{4}(2m+n)(4m^2-2mn+n^2).\end{aligned}$$

点评 分解因式时，应首先考虑各项有没有公因式，如果

有公因式，一定先提公因式，然后再考虑能否用其它方法继续分解. 本题如果先提 2，应如何分解？

例 6 因式分解$(x+y)^2-6(x+y)+9$.

分析 可将 $x+y$ 当作一个整体，此多项式便是关于这个整体的二次三项式，显然它可用完全平方公式分解.

解 $(x+y)^2-6(x+y)+9$

$$=(x+y)^2-2\times3\times(x+y)+3^2$$

$$=(x+y-3)^2.$$

点评 在运用公式分解因式时，一定要掌握公式的特点，尤其要注意完全平方公式中一次项系数的特点.

例 7 因式分解 x^2+6x-7.

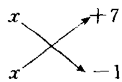
分析 这个二次三项不符合完全平方公式的特点，首先，二次项与常数项不同号，其次，常数项的绝对值不是一次项系数一半的平方，所以不能直接用公式分解，但经过适当的变形后，便可用公式分解. 另外，这样的二次三项式可用十字相乘法分解.

解 方法一

$$x^2+6x-7=x^2+6x+9-9-7=(x+3)^2-16$$

$$=(x+3+4)(x+3-4)=(x+7)(x-1).$$

方法二 $x^2+6x-7=(x+7)(x-1)$.



点评 方法一叫配方法. 用配方法分解二次三项式时，其前提是二次项系数为 1(如果二次项系数不是 1，则提取这个系数，使二次项系数转化为 1)；其关键是，加上紧接着减去一次项系数绝对值一半的平方，这样便达到配方的目的. 在用十字相乘法分解二次三项式时，主要考虑的是十字相乘后的代数和应是一次项.

例 8 因式分解 $3x^2-7x-6$.

分析 本题二次项系数不是1，如果用配方法分解，则应首先提取二次项系数3，然后再加、减一次项系数一半的平方；如果用十字相乘法分解，既要考虑好首尾两项的分解，更要考虑到十字相乘后的代数和应是中间项(即一次项).

解 **方法一**

$$
\begin{aligned}
3x^2-7x-6&=3\left(x^2-\frac{7}{3}x-2\right)\\
&=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}-2\right)\\
&=3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{11}{6}\right)^2\right]\\
&=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-3)=(3x+2)(x-3).
\end{aligned}
$$

方法二 $3x^2-7x-6=(3x+2)(x-3)$.

$$\begin{array}{ccc} 3x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & +2 \\ x & & -3 \end{array}$$

点评 用十字相乘法分解因式，在排列算式时，应想到同行不应有公因式(如本题二次项所分出的$3x$与常数项所分出的3不能放在同行，只能与分解出的另一个因式2放在同行)这是因为，如果同行有公因式，此公因式在开始分解时就应提出. 掌握这一点会简化操作过程. 从上述两例可以明显看出，在有理数范围内分解二次三项式ax^2+bx+c用十字相乘法比较方便，但随着数的范围的扩大，就看出配方法的重要了. 于是便出现这样的问题：在分解二次三项式ax^2+bx+c时，何时用公式法？何时用十字相乘法？何时用配方法？我们可用b^2-4ac的结果来判别：

$b^2-4ac=0$时，用完全平方公式分解；

$b^2-4ac>0$且是一个完全平方数时，用十字相乘法分解；

$b^2-4ac>0$但不是完全平方数时，用配方法分解；

$b^2-4ac<0$ 时，在有理数范围内和将来学到的实数范围内都不能分解.

至于为什么可用 b^2-4ac 的结果来作上述判断，这个问题在今后的学习中会得到解决.

例 9 因式分解 $2ax-10ay+5by-bx$.

分析 用分组分解法.可将一、二两项和四、三两项分别作为一组，这样不仅每组可分解，而且确保继续分解.

解 $2ax-10ay+5by-bx$

$$\begin{aligned}&=2ax-10ay-bx+5by\\&=(2ax-10ay)-(bx-5by)\\&=2a(x-5y)-b(x-5y)\\&=(x-5y)(2a-b).\end{aligned}$$

点评 本题还可以一、四两项一组，二、三两项一组，但不能一、三项和二、四项分组，可见分组要恰当.分组是否恰当，以能否达到因式分解的目的为标准.所以，分组后各组系数成比例则是恰当分组的重要条件.

例 10 因式分解：

(1) $x^2-2xy+y^2-1$； (2) x^2-2y-y^2-1.

分析 这两小题都不能平均分组，因为平均分组后，各组系数不可能成比例，从而达不到因式分解的目的，但经过观察可知，如果将(1)题前三项和第四项分组，将(2)题第一项和后三项分组，则可先用完全平方公式继而用平方差公式将其分解.

解 (1) $x^2-2xy+y^2-1$

$$\begin{aligned}&=(x^2-2xy+y^2)-1\\&=(x-y)^2-1=(x-y+1)(x-y-1).\end{aligned}$$

(2) $x^2-2y-y^2-1=x^2-y^2-2y-1$