ZENYANG YINGYONG DITUIFA JIETI

岳　宗

怎样应用递推法解题

内蒙古人民出版社

怎样应用递推法解题

岳　宗

内蒙古人民出版社

1985年·呼和浩特

怎样应用递推法解题

岳　宗

*

内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　内蒙古兴和县印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：8.125 字数：172千
1986年1月第一版　1986年3月第1次印刷
印数：1—2,300册
统一书号：7089·392　每册：1.05元

前　言

在丰富多彩的数学问题中，我们会遇到不少问题可用递推方法去解决。“递推，是由一定情况推出结果的非常有效的技巧，是很值得探讨的。”（见《数学译林》1983年第2卷第2期第105页）十八世纪伟大的瑞士数学家欧拉提出的“把一个凸n边形用不交叉的对角线分成三角形，有多少种不同的方式？”这个难题便可通过递推法获得解决。（见本书附录）

本书包括两方面内容：什么是递推法和递推法在初等数学中的应用。在什么是递推法一节里，主要是通过具体而生动的例子说明递推法的推理过程，并找出其一般规律；在递推法对初等数学中的应用一节中，则着重介绍了求数列的通项、求数列的前n项和、解证明题、证明不等式、解排列组合题、解初等几何题、求极限以及解其它一些数学问题。通过列举许多实际例子，以使读者从中理解并掌握递推方法。每节后面所附的习题及其解答，可供读者进一步练习，效仿和创新。

本书当前作为高中学生的数学课外读物是很适宜的。随着新技术革命的深入发展和我国四化建设的需要，要求我们的中学生不仅应当具备较为扎实的数学基础，更应当具有较强的自学能力、独立思考能力和解决实际问题的能力，与此同时，也还应当逐步培养创造性工作的能力。希望本书能在

这些方面为读者作出微薄的贡献。

本书谬误与不当之处，敬请读者批评指正，不胜感激。

作者　　　岳　　宗

一九八四年十月

目　录

附　录

§1. 什么是递推法

我们从“兔子问题”谈起。

十八世纪初期，意大利数学家菲波纳奇（Fibonacci）在他所著的“算盘的书”中，提出了一个十分有趣的题目——兔子问题：

“某人想知道一年内一对兔子可以生几对小兔子，他筑了一道围墙把一对兔子关在里面，已知一对兔子每一个月可以生一对小兔子，而一对兔子生下后第二个月就可以生兔子，一对兔子一年内繁殖成几对？”

现在让我们来寻求兔子繁殖的规律：

为方便起见，我们引入记号，“1”表示已成熟的一对兔子；“0”表示未成熟的兔子；每一对成熟的兔子经过一个月生下一对小兔子，则用“$1\begin{smallmatrix}\nearrow 1\\ \searrow 0\end{smallmatrix}$”表示（即意味着一对成熟的兔子经过一个月变成本身及新的未成熟的一对兔子）；未成熟的一对兔子经过一个月变成成熟的但尚未出生新的一对兔子，用记号“$0\rightarrow 1$”。这样兔子繁殖的规律可用图1表示。

从这图1中可看出，开头六个月，每月所有出生的兔子对数是

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13.$$

若用$F_n(n=1,2,\cdots,6)$表示上述六个数值，并分析由这六个数字构成的有限数列的项与项之间的关系，便可发现如下性

质：

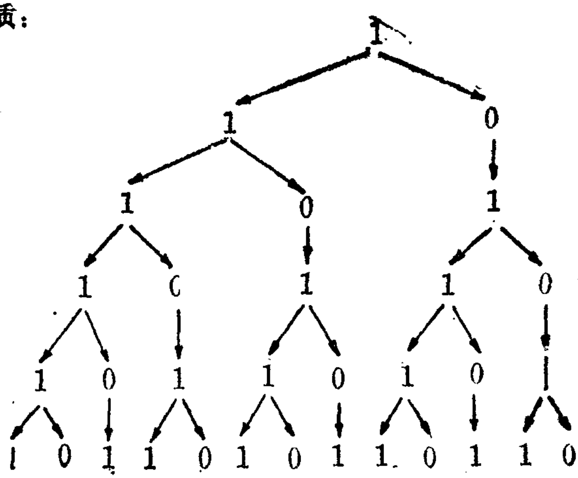

图 1

$F_1 = 1$；

$F_2 = 2$；

$F_3 = 3 = 1 + 2$；　即　$F_3 = F_2 + F_1$；

$F_4 = 5 = 2 + 3$；　　$F_4 = F_3 + F_2$；

$F_5 = 8 = 3 + 5$；　　$F_5 = F_4 + F_3$；

$F_6 = 13 = 5 + 8$；　　$F_6 = F_5 + F_4$。

由此我们发现，除第一，二两项外，每一项都是它前面两项的和，那末对于任何 $n \geqslant 3$ 的正整数，是否都有这一关系成立？我们考察在第 n（$\geqslant 3$）个月初，原先第（$n-1$）个月初在笼子里的所有兔子F_{n-1}对显然将仍在那里，而所有第（$n-2$）个月初在那里的兔子在第（$n-1$）个月内每对都生了一对兔子，则有F_{n-2}对，因此在第n个月初，就有$F_{n-1}+F_{n-2}$

对兔子，即有

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 3)$$

这就是说对任何$n \geqslant 3$的正整数，关系式$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$均成立。根据这一关系式和已经算得的F_1，F_2，…，F_6，我们便可逐一写出这个数列的各项

$$F_7 = F_6 + F_5 = 13 + 8 = 21;$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 21 + 13 = 34;$$

$$F_9 = F_8 + F_7 = 34 + 21 = 55;$$

$$\vdots$$

$$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233 + 144 = 377;$$

$$\vdots$$

由此我们知道一对兔子一年内繁殖的兔子对数为377。

如果在上述数列的最前面加一项1，并规定它为F_0，这样得到的数列$\{F_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots \qquad (F)$$

它仍保持关系式

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$$

为了纪念兔子问题的创始人，人们便将数列（F）称为菲波纳奇数列，它的每一项都叫菲波纳奇数。菲波纳奇数有许多有趣的性质，关于此，读者可参阅其它有关书籍。

现在我们回过头来看一看兔子问题的解决过程，便不难发现是在具备下述两个条件下，一步一步计算出来的。即

（a）知道了第一个月的兔子数；

（b）知道了兔子繁殖的规律：“一对兔子每一个月可以生一对兔子，而一对兔子生下后第二个月就可以生兔子。”

对于条件(a)，我们称它为初始值；对于条件(b)，我们

在穷举了$n=1,2,\cdots,6$后，归纳出关系式$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。通常称这种关系式为递推关系。由这一递推关系及初始值，我们求得了兔子问题的解答。

事实上，不仅兔子问题有这类递推关系，其它还有许多种类似$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$的这类关系都称为递推关系。递推关系提供了一种计算数列各项数值的有效手段，由初始值和递推关系式可以唯一地确定一个数列。我们对递推关系具有的实际意义，可以这样描述它：**递推关系表示带有整数参数量的一类确定的计量关系，在这种关系下，可以从给出的初始值出发，并依据前面已经算出的值一步一步的可以求出这些量中的每一个量的数值。**

一般说来，一个带整参数的量并不一定存在这种递推关系。如果我们分析一个具体的带整参数的量，从已写出的前面有限次归纳出一个各项之间关系的式子，并最终用数学归纳法证明它对一切整参数都成立，那么我们就可以说这个带整参数的量存在一个递推关系，而已验证了的关系式，就是递推关系式。反过来，如果我们不能验证这个式子对一切参数都成立，那么即使它对前面某有限项成立，我们仍不能说它是递推关系。

在许多情况下，由递推关系可以求得一个关于数列通项的明显的公式，这可以通过关系式的迭代，或猜想一个公式，然后利用递推关系通过数学归纳法加以证明。

利用递推关系来解决数学问题的方法称为**递推方法**，即通常叫做**递推法**。递推法在初等数学中有着广泛的应用，因为递推关系是从很多计数问题中自然产生的。

例 1　二项式系数问题。

著名的二项式定理

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n y^n$$

对于$r>0$，展开式中$x^{n-r}y^r$项的系数为C_n^r。我们定义

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

其中n、r是正整数，则有

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$$

这一关系式提供了关于二项式系数的一个基本递推公式，它的证明方法大家是熟知的（它可作为用数学归纳法来证明恒等式的典型例子），从这一递推公式中给以适当的初始值，就能用递推的方法，轻而易举地算出对所有非负整数n、r的二项式系数，它的计算程序如下图示：

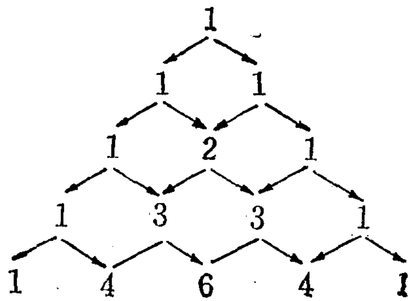

图 2

上图就是所谓杨辉（西方称帕斯卡（Pascal））三角形，若把上图箭头当作一个单向路，如果有可能从一个二项式系数P出发，顺着首尾相继的单向路而止于另一个二项式系数Q，则称P和Q可用单向路经相连。用I记最顶端的那个1，则I

和P可用P种单向路经相连，而二项式系数P正好等于这些不同路经的个数。如$P=6$，则表示从最顶端的1（$I=1$）出发，正好有6种不同路经通向P。杨辉三角形的这种有趣特点，是递推关系式$C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$所产生的结构的一个内在性质。用这一递推式可以证明许多其它的组合恒等式。

例2　课时分配问题

设某班学生需安排n节课时补习数学，其中n是正整数。现在每天都要补三角、代数，几何三门课之一，并规定补三角用1课时，补代数用2课时，补几何用2课时。现在要问把这n节课时用完的所有分配方法有多少种？

解　设x_n表示把这n节课时用完的所有分配方法的总数。并约定上三角课用"1"表示，上代数课用"2"表示，上几何课用"二"表示。例如记号（1，二，2）表示5节课时的一种分配方法：第一天上三角课，第二天上几何课，第三天上代数课。

现在我们来计算x_1，x_2，x_3，x_4。

当$n=1$时，即只有一节课时，那末第一天只能上三角，因为补代数、几何都要用2节课时，故得到1节课时的用法只有一种，即为（1），所以我们有$x_1=1$。

当$n=2$时，即有二节课时供安排，它可有下述几种分配方法：

（1，1）；（2）；（二）。

所以　　$x_2=3$。

当$n=3$时，即有三节课时供安排，它的分配方法为：

（1，1，1），（1，2），（1，二），（2，1），（二，1）

所以　　　$x_3=5$。

当$n=4$时，我们可以用同样方法得到如下分配方法：

(1，1，1)，(1，1，2)，(1，1，二)，(1，2，1)，(1，二，1)，(2，1，1)，(二　1，1)，(2，2)，(2，二)，(二，二)，(二，2)。

所以　　　$x_4=11$。

这样我们得到

$$x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,\ x_4=11. \qquad (1)$$

现在来寻求（1）式中的关系，可以看出：

$x_1=1$。

$x_2=3=2+1=2\cdot1+1=2x_1+(-1)^2$

$x_3=5=6-1=2\cdot3+(-1)^3=2x_2+(-1)^3$

$x_4=11=10+1=2\cdot5+(-1)^4=2x_3+(-1)^4$

由此我们猜想，当$n\geqslant2$时有

$$x_n=2x_{n-1}+(-1)^n \qquad (2)$$

用数学归纳法来验证（2）式的正确性。

Ⅰ．当$n=2,3,4$时，（2）式已经成立。

Ⅱ．假设$n=k$（$k\geqslant4$）时，（2）式成立，我们要证明当$n=k+1$时，（2）式也成立。

由于当$n=k$时，有

$$x_k=2x_{k-1}+(-1)^k$$

$$\therefore\quad 2x_{k-1}=x_k-(-1)^k=x_k+(-1)^{k+1} \qquad (3)$$

另一方面，当$n=k+1$时，我们根据题设条件可知它的分配方法是：若第一天上三角课，则用去1课时，还剩k节课时，这k节课时的分配法有x_k种；若第一天上代数课，则用去2课时，还剩$k-1$节课时，这$k-1$节课时的分配方法有x_{k-1}

种，若第一天上几何课，则用去2节课时，剩下的$k-1$节课时有x_{k-1}种分配法，所以可知

$$x_{k+1}=x_k+x_{k-1}+x_{k-1}=x_k+2x_{k-1} \tag{4}$$

现在将（3）式代入（4）式，便得到

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+2x_{k-1}=x_k+x_k+(-1)^{k+1}\\&=2x_k+(-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

所以当$n=k+1$时，（2）式亦成立．因此由数学归纳法知，对一切正整数$n(\geqslant 2)$，（2）式成立．

这样对于任何一个确定的正整数$n(\geqslant 2)$，我们都可以从递推关系式（2）中，从给出的初始值$x_1=1$并依据前面已算出的值一步一步计算出x_n的值．当然有时这样的计算是十分麻烦的，我们需要寻求计算x_n的比较直接的方法，这个问题留待下一节去讲，这里我们需要强调的是怎样按照题设的条件，用逐步递推的方法去寻求这种带整数参数的量的递推关系式，根据这一递推关系和给定的初始值，获得我们所需解决的问题的解答。

例3　插针问题。

设有甲、乙、丙三根针，在其中一根针上插有从小到大的n片圆薄片，最大的一片在最底下．现在要将这些圆薄片插到另外一根针上去，一次只能移动一片，并且规定大片总不能放在小片上面．问完成这个任务至少要移动多少次？

解　不妨设甲针上插有从小到大的n个圆薄片，按题意将这些薄片移到乙针上。

又设$f(n)$为移动n个圆薄片所需移动的次数，其中$n=0,1,2,\cdots$。

容易验证$f(0)=0$；$f(1)=1$；$f(2)=3$（因为当$n=2$

时，需先将甲针上一小的圆片移到丙针上，再将甲针上稍大的一片圆片移到乙针上，第三次再将丙针上的圆薄片移到乙针上，这样符合题意要求的移动总共为3次。）。当甲针上有n个圆薄片时，我们必须先把上面的$n-1$片移到丙针上，再把最大的一片移到乙针上，然后又把这$n-1$片移到插有最大一片的乙针上。因此有递推关系

$$f(n)=2f(n-1)+1 \qquad n=1,2,\cdots,$$

这是一个常系数线性递推关系，初始值$f(0)=0$，则用如下递推法来求$f(n)$：

$$\begin{aligned}f(n)&=2f(n-1)+1\\&=2[2f(n-2)+1]+1=2^2f(n-2)+2+1\\&=2^2[2f(n-3)+1]+2+1=2^3f(n-3)+2^2+2+1\\&=\cdots\cdots\\&=2^nf(0)+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\\&=2^n\cdot 0+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\\&=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\\&=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1, \qquad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

这就是说在有三根针的情况下，为了把n片从小到大插在甲针上的圆薄片按同样规律移到乙针上时（最大的一片总在最底下），至少要移动2^n-1次（$n=0,1,2,\cdots$）。

回顾兔子问题，二项式系数问题，课时分配问题以及插针问题，不难发现这些问题都和正整数n有关，解决这些问题也就是寻求定义在正整数集合上的函数$f(n)$的解析式。下面我们给出利用递推关系解这类问题的一般方法。

设给出初始值$u_1=a$和递推关系

$$u_n=f(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}),\quad (n\in N)$$

通常亦将此关系式称为递推公式。有时递推关系也用一个关于u_n未解出的方程

$$F(u_1,u_2,\cdots,\ u_n)=0$$

给出，在这种情况下总是假定这个方程关于u_n可 解的。用递推关系可以给出一个数列，亦即给出一个无限方程组：

$$(f)\quad \begin{cases} u_1=a, \\ u_2=f_2(u_1), \\ u_3=f_3(u_1,u_2), \\ \quad\cdots\cdots \\ u_n=f_n(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}), \\ \quad\cdots\cdots \end{cases}$$

这样由递推方法，知道了u_1可求出u_2，知道了u_2可求出u_3，……。知道了u_{n-1}可求出u_n等等。假如对于一切$n\geqslant 1$，数组$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$属于函数$f_n(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$的定义域，那末由此唯一确定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{n-1},\ u_n,\ \cdots$$

这就叫无限方程组(f)的解。

我们可以把上述方法推广到更一般的情形。

设$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$是变数$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$的一个解析表达式。任取变数的一组允许值

$$x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ \cdots\cdots,\ x_k=a_k.$$

由方程组

$$u_1=a_1,\ u_2=a_2,\ \cdots,\ u_k=a_k,$$

$$u_{k+1}=f(u_1, u_2, \cdots, u_k),$$
$$u_{k+2}=f(u_2, u_3, \cdots, u_{k+1}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{k+n}=f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}),$$
$$\cdots\cdots$$

所定义的数列$\{u_n\}$叫做由递推关系

$$u_{n+k}=f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1})$$

给出的数列。

假如给定了初始值，即是数列中前k项

$$a_1, a_2, \cdots, a_k$$

递推公式$u_{n+k}=f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1})$便唯一确定了一个具体的数列，初始值组可以从函数$f$的变数允许值组的集合里任意给出。

我们看两个最简单的例子。

等差数列$\{a_n\}$，设首项$a_1=a$公差为d，就有

$$\begin{cases} a_1=a & (1) \\ a_{k+1}=a_k+d \quad (k=1,2,3,\cdots) & (2) \end{cases}$$

当给出了(1)，(2)时，先从(1)得

$$a_1=a$$

再对于(2)，令$k=1,2,3,\cdots$逐步递推得

$$a_2=a_1+d=a+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a+2d,$$
$$\begin{aligned} a_4&=a_3+d=(a_2+d)+d \\ &=(a+2d)+d \\ &=a+3d, \end{aligned}$$