



小学教师进修中等师范试用教材
辽、吉、黑、湘四省教材协编组编

算术基础理论自学指导

湖南教育出版社

小学教师进修中等师范试用教材

算 术 基 础 理 论

自 学 指 导

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省教材协编组编

湖南教育出版社

小学教师进修中等师范试用教材

算 术 基 础 理 论

自 学 指 导

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省教材协编组编

湖南教育出版社出版 吉林人民出版社重印

吉林省新华书店发行 大安县印刷厂印刷

1983年7月吉林第1版第1次印刷

字数：180,000 印张：9 印数：1—63,100

统一书号：7234·215

定价：0.69元

说 明

这套试用教材是根据教育部颁发的《小学教师进修中等师范教学计划(试行草案)》的要求和函授教学的特点,以及业余面授和离职进修的需要而编写的。作为辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省小学教师进修中等师范课程的试用教材。

这本《自学指导》是为配合《算术基础理论》的学习而编写的。本书按章提出了学习要求和注意事项。按节写了教材说明,既有教材内容的浅析,也有知识的引伸。它可帮助不同程度的学员更好地理解教材、掌握知识。本书对于练习、习题和复习题的解答,采取了灵活多样的形式:有的给以必要的分析和答案,有的给出简要的提示和答案,有的只给答案,一般不给出算式,以培养学员的自学能力。每章的最后还附有自测题,以便学员及时了解自己的学习效果。

本书的初稿写出后,经辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省小学教师进修中师教材编审会议讨论审定,安徽省的同志到会给予了热忱的帮助。在此表示感谢。

本书由郭涤尘同志主编,编者有刘齐平(一、二章)、傅世球(一、三章)郭涤尘(四章)、李锋(五、六章)。

由于编写人员水平有限，加之时间短促，本书的缺点错误可能不少，敬希读者批评指正。

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省

小学教师进修中师教材协编组

一九八三年三月

目 录

第一章 集合与对应

一 集合

- 1.1 集合的概念 (2) 1.2 集合的包含与相等 (4)
1.3 并集与交集 (6) 1.4 差集与补集 (9) 1.5 集合
的运算定律 (12) 习题一解答 (14)

二 对应

- 1.6 单值对应 (17) 1.7 一一对应与逆对应 (19)
1.8 等价集合与基数 (22) 复习题一解答 (24)

第二章 整 数

一 整数的认识

- 2.1 自然数与自然数列 (30) 2.2 零与扩大自然数列
(34) 2.3 十进制计数法 (35) 2.4 非十进制记数法
(37) 习题二解答 (38)

二 整数的加法和减法

- 2.5 整数的加法 (40) 2.6 整数的减法 (44) 2.7 加
减法中已知数与未知数的关系 (46) 2.8 已知数的变化
所引起的和与差的变化 (48) 2.9 加减法应用题 (50)

习题三解答 (53)

三 整数的乘法和除法

2.10 整数的乘法 (57) 2.11 整数的除法 (59) 2.12
乘除法中已知数与未知数的关系 (63) 2.13 已知数的变
化所引起的积与商的变化 (65) 2.14 乘除法应用
题 (67) 习题四解答 (71)

四 速算

2.15 一般的速算方法 (76) 2.16 特殊的速算方法 (80)
习题五解答 (82)

五 整数四则应用题

2.17 应用题的概念和分类 (84) 2.18 解答应用题的一
般步骤 (88) 2.19 复合应用题的思考方法 (91) 2.20
典型应用题及其解法 (一) (95) 2.21 典型应用题及其
解法 (二) (96) 2.22 典型应用题及其解法 (三) (98)
习题六解答 (101) 复习题二解答 (110)

第三章 数的整除性

一 数的整除性

3.1 约数和倍数 (121) 3.2 充分条件与必要条件 (122)
3.3 数的整除性定理 (124) 3.4 能被一个数整除的特征
(126) 习题七解答 (130)

二 最大公约数和最小公倍数的意义和性质

3.5 最大公约数的意义和性质 (133) 3.6 最小公倍数的
意义和性质 (135) 习题八解答 (137)

三 分解质因数

3.7 质数与合数 (139) 3.8 质数的判定 (140) 3.9 分解质因数 (142) 习题九解答 (144)

四 最大公约数和最小公倍数的求法与应用

3.10 最大公约数的求法 (145) 3.11 最小公倍数的求法 (146)
3.12 最大公约数与最小公倍数的应用题 (149) 习题十解答 (150)

五 同余的初步知识

3.13 同余的概念和性质 (154) 3.14 中国剩余定理 (156)
习题十一解答 (157) 复习题三解答 (158)

第四章 分 数

一 分数的概念和性质

4.1 分数的概念 (166) 4.2 分数的性质 (170) 4.3 约分与通分 (172) 4.4 真分数和假分数 (174) 习题十二解答 (175)

二 分数的四则运算

4.5 分数的加法 (177) 4.6 分数的减法 (181) 4.7 分数乘法 (184) 4.8 分数除法 (188) 4.9 分数四则混合运算及繁分数 (195) 习题十三解答 (198)

三 分数应用题

4.10 分数简单应用题 (203) 4.11 分数复合应用题 (206)
习题十四解答 (213) 复习题四解答 (219)

第五章 小 数

一 小数的概念和性质

5.1小数的概念 (230) 5.2小数的性质 (232) 5.3 小数大小的比较 (233) 习题十五解答 (234)

二 小数的四则运算

5.4 小数的加法和减法 (235) 5.5 小数乘法 (236)
5.6小数除法 (238) 5.7 近似数 (240) 习题十六解答 (241)

三 小数和分数

5.8化分数为小数 (244) 5.9化小数为分数 (248) 5.10
分数、小数的四则混合运算 (249) 5.11百分数 (251)
习题十七解答 (253)

四 近似数的计算

5.12近似数的误差、精确度与有效数字 (257) 5.13近似
数的计算 (259) 习题十八解答 (261) 复习题五解答
(264)

第六章 量的计量

一 量的概念和计量

二 计量制度

三 名数

习题十九解答 (277)

第一章 集合与对应

要求:

1. 了解集合、子集、交集、并集、差集、补集及有关概念,掌握集合的两种表示方法(列举法与描述法)。

2. 掌握集合的交、并、差、补等运算,初步理解交换律、结合律和分配律。

3. 了解对应、单值对应、一一对应和逆对应等概念,初步掌握求逆对应的方法。了解等价集合的概念。

4. 课时分配:函授17课时,业余面授10课时,离职进修12课时。

注意事项:

1. 本章要作为算术的理论基础,所以教材中尽量避免出现算术中的概念。但因读者都学过了初中数学,所以本章要联系初中所学过的代数、几何方面的知识,读者要预先复习。

2. 本章内容比较抽象,学习时要多联系实际,有些知识容易混淆,要经常对比。

一 集 合

1.1 集合的概念

教材说明

1. 怎样理解“集合中的元素是确定的”和“集合中的元素是互异的”这两句话？

“集合中的元素是确定的”这句话的意思是：任何一个对象，要么是这个集合的元素，要么不是它的元素。就是说，不存在“既是这个集合的元素，又不是这个集合的元素”这样的对象，也不存在“无法确定它是不是这个集合的元素”这样的对象。例如，在本书中，不把“离武汉较近的城市”看成是一个集合，因为它的元素不是确定的。我们无法肯定长沙是否属于这个集合，因为长沙到武汉的距离比广州到武汉的距离近，而长沙到武汉的距离比岳阳到武汉的距离远。

“集合中的元素是互异的”这句话的意思是：集合中的任何两个元素都是不同的对象。就是说，集合中不存在完全相同的元素。例如，方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的根的集合，不能写成 $\{1, 1\}$ ，只能写成 $\{1\}$ 。为了表示1是这个方程的二重根，也可写成 $\{1_2\}$ ，其中数字1的右下角的2，表示元素1的重复次数。

必须指出：元素的异同，应该由集合的性质来确定。例如，写3853这个数时所用的阿拉伯数字的集合是 $\{3, 8, 5\}$ ，这里，千位上的3和个位上的3是同一个阿拉伯数字；印刷工人

排版时，排出 3853 所用的铅字的集合是 $\{3, 8, 5, 3\}$ ；这里，同一个阿拉伯数字 3 要有两个铅字。

2. 表示集合的列举法和描述法各有什么优越性？

用列举法表示集合，要将集合中的元素一一列举出来，所以，从列举法表示的集合中，可以清楚地看出它有哪些元素，但不易看出这些元素有哪些公共属性。用描述法表示的集合则相反，因为用描述法表示集合，就要写出集合中的所有元素的公共属性，但从中不易看出集合是由哪些元素组成的。

又因为用列举法表示集合时，要将集合中的元素一一列举出来，所以，元素不多的有限集合宜于用列举法表示。有限集合也可用描述法表示，但有些有限集合（如 $\{82, -0.2, \sqrt{2}, \frac{1}{58}\}$ ）用描述法表示就不太容易。由于无限集合的元素不可能全

部一一列举出来，所以无限集合宜于用描述法表示。但是，为了方便起见，有些无限集合我们也用列举法来表示，如自然数集合可表示为 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ，省略号“ $\dots$ ”表示它有无限多个元素。

练习解答

1. 答：有限集合有 (1)、(3)、(4)、(6)、(7)、(8)；无限集合有 (2) 和 (5)。空集有 (3) 和 (6)，单元素集合有 (1) 和 (7)。

2. 答：(1) $\{7\}$ ；(2) {水星，金星，地球，火星，木星，土星，天王星，海王星，冥王星}；(3) {拇指，食指，中指，

无名指，小指}；(4){ }

3.答：(1){中国的两大河流}；(2){我国的首都}；
(3){ $x \mid x^2 - 1 = 0$ }；(4){直角三角形}。

4.答：(1) $a \in \{a\}$ ；(2) $0 \notin \{ \}$ ；(3) $0 \in \{0\}$ ；
(4) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ；(5) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ ；(6) $3.1416 \notin \{\text{无理数}\}$ 。

1.2 集合的包含与相等

教材说明

1. “ $A = B$ ”、“ $A \subset B$ ”与“ $A \subseteq B$ ”三者有何区别和联系？

“ $A = B$ ”的意义是：集合A的任何一个元素都是集合B的元素，而集合B的任何一个元素也都是集合A的元素。因此，集合A的元素与集合B的元素完全相同。

“ $A \subset B$ ”的意义是：集合A的任何一个元素都是集合B的元素，但集合B的元素并不都是集合A的元素，其中至少有一个元素不属于A。因此，集合A的元素只是集合B的元素的一部分。

“ $A \subseteq B$ ”的意义是：集合A的任何一个元素都是集合B的元素，而集合B的元素可能都是集合A的元素，也可能不都是集合A的元素。因此，集合A的元素可能是与集合B的元素完全相同，也可能只是集合B的元素的一部分。

由此可见，“ $A \subseteq B$ ”包括两种情况： $A = B$ 与 $A \subset B$ 。因此，我们可以把符号“ $\subseteq$ ”看作是“ $\subset$ ”与“ $=$ ”合并而成

的。

2. “ $\in$ ”与“ $\subset$ ”这两个符号的意义有何不同?

“ $\in$ ”的意义是“属于”，表示元素与集合的关系；“ $\subset$ ”的意义是“包含于”，表示集合与集合的关系。例如： a 与 $\{a, b\}$ 的关系只能写成 $a \in \{a, b\}$ ，而不能写成 $a \subset \{a, b\}$ ； $\{a\}$ 与 $\{a, b\}$ 的关系只能写成 $\{a\} \subset \{a, b\}$ ，而不能写成 $\{a\} \in \{a, b\}$ 。

3. 几个元素组成的集合有多少个子集？有多少个真子集？

先看2个元素的集合 $\{a, b\}$ 有多少个子集，有多少个真子集：

子集： $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. 4个

真子集： $\phi, \{a\}, \{b\}$. 3个

再看3个元素的集合 $\{a, b, c\}$ 有多少个子集，有多少个真子集：

子集： 8个

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

真子集： 7个

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

由此可见：2个元素的集合有 2^2 个子集，有 $(2^2 - 1)$ 个真子集；3个元素的集合有 2^3 个子集，有 $(2^3 - 1)$ 个真子集。

一般地， n 个元素的集合有 2^n 个子集，有 $(2^n - 1)$ 个真子集。

这个结论是可以证明的，但我们不给予证明。

练习解答

1. 答: (1) $\emptyset = \{ \}$, (2) $0 \notin \emptyset$; (3) $\emptyset \subseteq \{0\}$;

(4) $a \in \{a\}$; (5) $\angle A (=180^\circ) \notin \{\text{钝角}\}$;

(6) $\{\text{等边三角形}\} \subseteq \{\text{锐角三角形}\}$; (7) $\{\text{梯形}\} \subset \{\text{平行四边形}\}$

(8) $\{x \mid |x| = 1\} = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$

2. 证明: 设 x 是集合 A 的任意元素, 即 $x \in A$.

$\because A \subset B, \therefore x \in B$,

又 $\because B \subset C, \therefore x \in C$,

由子集的定义得 $A \subseteq C$.

$\because B \subset C, \therefore C$ 中存在元素 $x', x' \notin B$,

又 $\because A \subset B, \therefore x' \notin A$,

由真子集的定义得 $A \subset C$.

1.3 并集与交集

教材说明

1. “ $x \in A$ 或 $x \in B$ ” 与 “ $x \in A$ 且 $x \in B$ ” 有什么不同?

对于任何两个集合 A 、 B 而言, x 有以下四种可能:

① x 既属于 A , 又属于 B ;

② x 只属于 A , 不属于 B ;

③ x 不属于 A , 只属于 B ;

④ x 不属于 A , 也不属于 B .

“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ” 包括①、②、③这三种情况。就是说, x

只要属于A、B两集合中的任何一个，我们就可以说： $x \in A$ 或 $x \in B$ 。

“ $x \in A$ 且 $x \in B$ ”只能包括情况①，就是说， x 只要不属于A、B两集合中的任何一个，我们就不能说“ $x \in A$ 且 $x \in B$ ”。

对于“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”有两种理解：第一种理解已于前述；第二种理解是：“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”只包括②、③两种情况。由于第一种理解不排除“ x 既属于A，又属于B”的情况，所以，这时的“或”叫做“可兼的”。由于第二种理解排除“ x 既属于A，又属于B”的情况，所以，这时的“或”叫做“不可兼的”。在本书中，我们对“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”作第一种理解。

$$2. \text{ 为什么 } \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \right\} =$$

$$\{(x, y) \mid a_1x + b_1y = c_1\} \cap \{(x, y) \mid a_2x + b_2y = c_2\}?$$

因为方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解，就是方程 $a_1x + b_1y = c_1$

c_1 和方程 $a_2x + b_2y = c_2$ 的公共解，所以，方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 的解集就是方程 } a_1x + b_1y = c_1 \text{ 的解集与方}$$

程 $a_2x + b_2y = c_2$ 的解集的交集。于是就得到了上面的等式。

用同样的道理可以说明：任意方程组的解集都是该方程组中各个方程的解集的交集，任意不等式组的解集也都是该不等式组中各个不等式的解集的交集。

练习解答

1. 解：(1) $A \cup B = \{\text{锐角三角形}\}$ ， $A \cap B = \{\text{等边三角}$

形};

$$(2) A \cup B = \{\text{三角形}\}, A \cap B = \emptyset,$$

$$(3) A \cup B = \{\text{等腰三角形或直角三角形}\},$$

$$A \cap B = \{\text{等腰直角三角形}\};$$

$$(4) A \cup B = \{x \mid -\infty < x < +\infty\},$$

$$A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 6\};$$

$$(5) A \cup B = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 6\}, A \cap B = \emptyset;$$

$$(6) A \cup B = \{x \mid x \geq 0\}, A \cap B = \{x \mid x > 6\}.$$

2. 证明: 设 x 是集合 $A \cap B$ 的任一元素.

$$\because x \in A \cap B, \therefore x \in A \text{ 且 } x \in B,$$

$$\because x \in A, \therefore A \cap B \subseteq A.$$

又设 y 是集合 A 的任意元素.

$$\because y \in A, A \subseteq B, \therefore y \in B,$$

$$\because y \in A \text{ 且 } y \in B, \therefore y \in A \cap B,$$

于是

$$A \subseteq A \cap B.$$

$$\because A \cap B \subseteq A \text{ 且 } A \subseteq A \cap B, \therefore A \cap B = A.$$

3. 解: (1) 方程 $x^2 - 9x + 20 = 0$ 的解集是

$$\{x \mid x^2 - 9x + 20 = 0\} = \{x \mid (x-4)(x-5) = 0\}$$

$$= \{x \mid x-4=0 \text{ 或 } x-5=0\}$$

$$= \{x \mid x-4=0\} \cup \{x \mid x-5=0\}$$

$$= \{4\} \cup \{5\}$$

$$= \{4, 5\};$$

$$(2) \{x \mid x^2 + x - 12 = 0\} = \dots = \{3, -4\}.$$