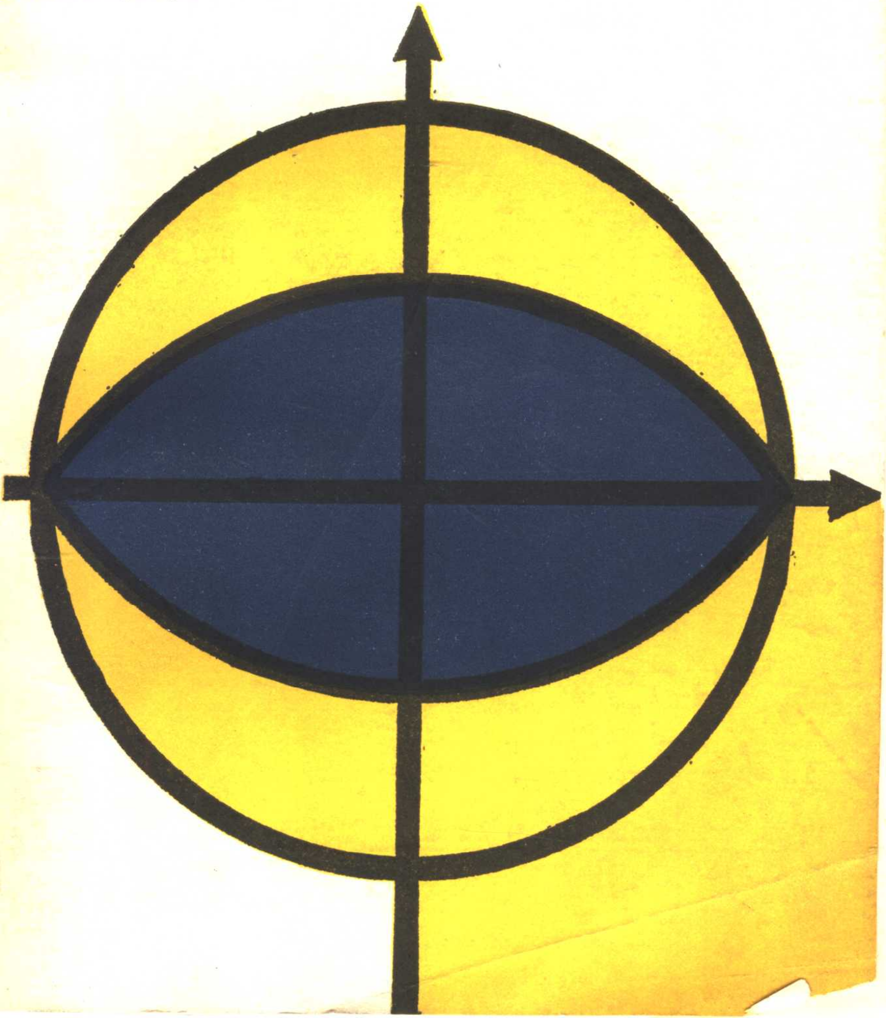
巧解
平面解析几何题

胡世荣 郭 琼

重庆出版社



巧解平面解析几何题

胡世荣　郭　琼

重　庆　出　版　社

1989年·重庆

责任编辑　赵　剑
封面设计　王　平
技术设计　聂丹英

胡世荣　郭　琼
巧解平面解析几何题

重庆出版社出版（重庆长江二路205号）
新华书店经销、发行　重庆印制一厂印刷
*
开本787×1092　1/32　印张 8.625　字数 195 千
1989年11月第一版　1989年11月第一版第一次印刷
印数：1—3,000
ISBN 7-5366-1059-9/G·385

定价：2.30元

编 者 说 明

由于思路不同，多数平面解析几何题的解法往往不止一个。这些解法中，有的过程复杂，计算量大，而有的却过程简单，计算量小，极为简捷。本书内容是探索某些平面解析几何题的简捷解法。

本书有下列特点：

每个例题都有简捷解法，思路新颖，计算简便，非常巧妙。

对于每个例题，先介绍一般数学书刊上常见的几种解法，然后提供笔者的简捷解法。这样，读者既可学习常见解法，又可把常见解法与简捷解法加以对比，更可看出简捷解法的新颖与巧妙。

某些例题的解题过程写明了解题思路，有利于提高读者的思考能力。

每一类例题之后，作出小结。归纳出这一类题目的特点，便于读者根据题目的特点选用简捷解法。

书中配备了十一组练习题。在每一组练习题中，把可用不同简捷解法解的题目混合配搭，促使读者分析题目的条件和要求，思考出简捷解法，提高解题能力。

书末附有练习题解答。

由于本书具有上述特点，因此本书是高中学生和自学数

学青年的辅助读物，也可供中学数学教师和师范院校数学系师生参考。

本书例题中的简捷解法和练习题的解法，有的可能不是最简捷的。如蒙读者函告更为巧妙的解法，至为感谢。

最后，还要特别说明：笔者从数学书刊上引用的某些题目，原文解题过程叙述很略，为了便于读者阅读，笔者作了补充，但思路未变。此外，笔者引用的解法，各有特色，有利于读者学习多种解法，特向原作者致谢。

目 录

一、代 点 法

代点法的三大优点：1.应用广泛；2.计算量小；3.易于掌握。

凡是涉及圆锥曲线（包括退化圆锥曲线）的弦的中点的题，都可用代点法解，其他某些题也可用代点法解。

1. 什么是代点法

通过下例的解法一，说明代点法是一种什么样的解题方法。

例1-1 求椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$中斜率是 m 的平行弦的中点的轨迹。

解法一 （代点法）

（为了便于掌握代点法，特标明解题步骤）

（1） 设出弦的端点坐标

设斜率是m的平行弦中的任意一条是AB，其两端

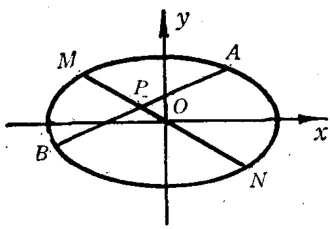


图 1-1

点是$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$。

（2） 代入

因点$A(x_1,y_1)$与点$B(x_2,y_2)$都在椭圆上，故将它们的坐标代入椭圆方程得

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\qquad b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2.$$

（3） 相减并分解因式

上列二式相减，得

$$b^2(x_1^2-x_2^2)+a^2(y_1^2-y_2^2)=0.$$

上式左边分解因式得

$$b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0. \qquad \text{(甲)}$$

（4） 代换

因弦AB的斜率存在（斜率为m），故$x_1-x_2\neq 0$，于是将（甲）的各项都除以x_1-x_2，得

$$b^2(x_1+x_2)+a^2(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0. \qquad \text{(乙)}$$

因已知弦AB的斜率为m，故

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=m. \qquad \text{(丙)}$$

设AB的中点是$P(\bar{x},\bar{y})$，则由线段中点坐标公式得

$$x_1+x_2=2\bar{x},\quad y_1+y_2=2\bar{y}. \qquad \text{(丁)}$$

将(丙)、(丁)代入(乙)并整理，得直线方程

$$b^2\bar{x}+a^2m\bar{y}=0,$$

因此，点 $P(\bar{x},\bar{y})$ 的轨迹是这直线在椭圆内的一线段 MN。

［解完］

由于首先把弦 AB 的端点坐标代入椭圆方程，因此笔者把这个解法命名为“代点法”。

上面标明的是代点法的基本步骤。其核心部分是通过将(丙)、(丁)代入(乙)，就消去了四个参数x_1、x_2、y_1、y_2。以后还将根据题目的特点，灵活应用代点法。

下面再用三个常见方法解这个题，便于读者与代点法对比，可进一步看出代点法计算简捷，易于掌握。

解法二 (常见解法)

设 AB 是平行弦中的任意一条，其所在直线方程是 $y=mx+t$，t是参数。

代$y=mx+t$入椭圆方程，得

$$b^2x^2+a^2(mx+t)^2=a^2b^2,$$

整理得 $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mtx+a^2t^2-a^2b^2=0.$ (1)

这个方程的两个根就是点A的横坐标x_1与点 B 的横坐标x_2，于是由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2mt}{a^2m^2+b^2}. \tag{2}$$

设弦AB的中点是$P(\bar{x},\bar{y})$，则由线段中点坐标公式及(2)得

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{a^2mt}{a^2m^2+b^2}. \tag{3}$$

因为点$P(\bar{x},\bar{y})$在弦AB上，所以

$$\bar{y}=m\bar{x}+t. \tag{4}$$

代(3)入(4)并整理得

$$\bar{y}=\frac{b^2t}{a^2m^2+b^2}. \tag{5}$$

由(3)与(5)得点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹所在直线的参数方程是

$$\begin{cases} \bar{x}=-\dfrac{a^2mt}{a^2m^2+b^2}, \\ \bar{y}=\dfrac{b^2t}{a^2m^2+b^2}. \end{cases}$$

消去参数t，得点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹所在直线的普通方程是

$$b^2\bar{x}+a^2m\bar{y}=0. \tag{6}$$

所求轨迹是直线(6)与椭圆相交所得的一条线段MN.［解完］

这个解法见于人民教育出版社1963年编高中数学课本《平面解析几何》. 还见于国内外很多平面解析几何书，如美国P. F. Smith和A. S. Gale二人合著的"The Elements of Analytic Geometry"，苏联H. B. 叶菲莫夫著《解析几何简明教程》（人民教育出版社1956年中译本），日本笹部贞市郎著《几何学辞典》（科学技术文献出版社重庆分社1980年中译本），上海教育学院编《解析几何》上册（1982年版）等. 可见这个解法经历时间很长，流传很广.

解法三 （常见解法）

设斜率为m的弦AB的中点为$P(\bar{x},\bar{y})$，这弦的倾斜角为θ，则这弦所在直线的参数方程是

$$\begin{cases} x=\bar{x}+t\cos\theta, \\ y=\bar{y}+t\sin\theta. \end{cases} \quad (t\text{是参数})$$

代入椭圆方程并化简得

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2\bar{x}\cos\theta+a^2\bar{y}\sin\theta)t$$
$$+b^2\bar{x}^2+a^2\bar{y}^2-a^2b^2=0. \tag{1}$$

当点$(\bar{x},\bar{y})$在椭圆内部时，有

$$b^2\bar{x}^2+a^2\bar{y}^2-a^2b^2<0,$$

因此方程(1)的判别式$\Delta>0$，于是方程(1)有两个实数根t_1与t_2。因为点$P(\bar{x},\bar{y})$是弦AB的中点，所以 $t_1+t_2=0$。 (2)

方程(1)中，由韦达定理有

$$t_1+t_2=-\frac{2(b^2\bar{x}\cos\theta+a^2\bar{y}\sin\theta)}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}, \tag{3}$$

由(2)、(3)得

$$b^2\bar{x}\cos\theta+a^2\bar{y}\sin\theta=0. \tag{4}$$

因弦AB的斜率存在且为m，故$\theta\neq 90^\circ$，则 $\cos\theta\neq 0$，于是由(4)得

$$b^2\bar{x}+a^2\bar{y}\cdot\mathrm{tg}\theta=0.$$

但因$\mathrm{tg}\theta=m$，又以x、y代换$\bar{x}$、$\bar{y}$，得所求轨迹方程为

$$b^2x+a^2my=0.$$

因此，所求的点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹是这直线在椭圆内的一段。[解完]

这个解法见于《数学题解辞典·平面解析几何》（上海辞书出版社1983年版）第621题。

解法四 （常见解法）

因椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程是$\begin{cases} x=a\cos\alpha, \\ y=b\sin\alpha, \end{cases}$ 故设斜率为m的弦AB的两个端点是

$$A(a\cos\theta,b\sin\theta),\ B(a\cos\varphi,b\sin\varphi),$$

则弦AB的斜率是

$$m=\frac{b\sin\theta-b\sin\varphi}{a\cos\theta-a\cos\varphi}$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{2\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cdot\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}{-2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cdot\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$=-\frac{b}{a}\text{ctg}\frac{1}{2}(\theta+\varphi),$$

因此得 $$\text{ctg}\frac{1}{2}(\theta+\varphi)=-\frac{am}{b}. \tag{1}$$

设弦AB的中点为$P(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(a\cos\theta+a\cos\varphi)$$

$$=a\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi);$$

$$\bar{y}=\frac{1}{2}(b\sin\theta+b\sin\varphi)$$

$$=b\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi).$$

由上列二式得

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}}=\frac{a}{b}\text{ctg}\frac{1}{2}(\theta+\varphi). \tag{2}$$

代(1)入(2)得

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}}=-\frac{a^2m}{b^2},$$

即 $$b^2\bar{x}+a^2m\bar{y}=0,$$

因此点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹是这直线在椭圆内的一段。　　［解完］

这解法见《数学教学通讯》1980年第3期。

笔者从实践中认识到代点法的优点是应用广泛，计算量小，易于掌握。读者从上面四个解法中可以初步看出代点法比其他三个解法计算简便，而且容易掌握。应用代点法可以简捷地解答涉及圆锥曲线的弦的中点的问题及其他一些问

题，这是代点法的另一个优点，即应用范围的广泛性。下面将分类举例说明代点法的应用。

在本书中只举例说明代点法的应用，而不在理论上进行探讨。若读者要深入研究代点法的理论，请参看笔者写的《解平面解析几何题的一种简捷方法——代点法》，刊登在《数学通报》1983年第6期。

2. 圆锥曲线的弦的斜率为定值求这弦的中点轨迹

前面的例1-1是属于这类题的一个，再举例如下。

例1-2 求曲线

$$5x^2-6xy+5y^2-16\sqrt{2}x+16\sqrt{2}y=0$$

的斜率为2的平行弦的中点轨迹。

解法一 （用直线的斜截式方程、韦达定理等解）

设斜率为2的平行弦中的任意一条是AB，其方程是

$$y=2x+t \quad (t\text{为参数}). \tag{1}$$

代入所给曲线方程并整理得

$$13x^2+(14t+16\sqrt{2})x+(5t^2+16\sqrt{2}t)=0.$$

当这个方程的根的判别式$\Delta\geqslant 0$时，这方程有两个实数根x_1与x_2，根据韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{14t+16\sqrt{2}}{13}.$$

设弦AB的中点为$P(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{7t+8\sqrt{2}}{13}. \tag{2}$$

由(2)可求出 $\quad t=-\frac{1}{7}(13\bar{x}+8\sqrt{2})$。 (3)

因为点$P(\bar{x},\bar{y})$在弦AB上，所以由(1)得

$$\bar{y}=2\bar{x}+t. \tag{4}$$

代(3)入(4)，并整理得直线方程

$$\bar{x}-7\bar{y}-8\sqrt{2}=0.$$

故所求轨迹是直线$x-7y-8\sqrt{2}=0$在所给曲线内的一条线段。 [解完]

这个解法见《数学题解辞典·平面解析几何》第1080题。

解法二 （代点法）

设斜率为2的平行弦中的任意一条AB的端点是$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$，把这两点的坐标分别代入所给曲线方程得

$$5x_1^2-6x_1y_1+5y_1^2-16\sqrt{2}x_1+16\sqrt{2}y_1=0,$$

$$5x_2^2-6x_2y_2+5y_2^2-16\sqrt{2}x_2+16\sqrt{2}y_2=0.$$

两式相减，并分解因式得

$$5(x_1+x_2)(x_1-x_2)-6(x_1y_1-x_2y_2)+5(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$
$$-16\sqrt{2}(x_1-x_2)+16\sqrt{2}(y_1-y_2)=0. \tag{1}$$

设弦AB的中点为$P(\bar{x},\bar{y})$，则由线段中点坐标公式得

$$x_1+x_2=2\bar{x}, \tag{2}$$

$$y_1+y_2=2\bar{y}. \tag{3}$$

我们又把(1)中的$x_1y_1-x_2y_2$进行下面的变形：

$$x_1y_1-x_2y_2=\frac{1}{2}[x_1(y_1-y_2)+x_2(y_1-y_2)+y_1(x_1-x_2)$$
$$+y_2(x_1-x_2)]$$
$$=\frac{1}{2}[(y_1-y_2)(x_1+x_2)+(x_1-x_2)(y_1+y_2)].$$

$$=(y_1-y_2)\bar{x}+(x_1-x_2)\bar{y}. \tag{4}$$

将(2)、(3)、(4)代入(1)得

$$5\bar{x}(x_1-x_2)-3(y_1-y_2)\bar{x}-3(x_1-x_2)\bar{y}+5\bar{y}(y_1-y_2)$$
$$-8\sqrt{2}(x_1-x_2)+8\sqrt{2}(y_1-y_2)=0.$$

因弦AB的斜率为2，即$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，故$x_1-x_2\neq 0$，因此用$x_1-x_2$去除上一方程的各项，得直线方程

$$\bar{x}-7\bar{y}-8\sqrt{2}=0.$$

要求的点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹是这直线在所给曲线内的一段。

［解完］

说明：这题所给圆锥曲线方程不是标准方程，其中含有xy这样的项，用代点法解这样的题时，要学会(4)式的变形。

例1-3 已知两条直线

$$l_1:\ x-2y+1=0 \text{ 与 } l_2:\ x+2y+1=0,$$

斜率为2的直线l与l_1交于点A，又与l_2交于点B，求线段AB的中点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹。

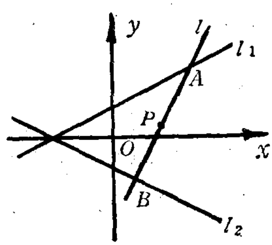


图 1-2

解法一 （常见解法）

设直线l的方程是$y=2x+b$。

解方程组$\begin{cases} y=2x+b, \\ x-2y+1=0, \end{cases}$

得点$A\left(\frac{1-2b}{3},\ \frac{2-b}{3}\right)$。

解方程组$\begin{cases} y=2x+b, \\ x+2y+1=0, \end{cases}$ 得点$B\left(\frac{-2b-1}{5},\ \frac{b-2}{5}\right)$。

应用线段的中点坐标公式，得线段AB的中点P的坐标是

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2b}{3}+\frac{-2b-1}{5}\right)=\frac{1-8b}{15}, \tag{1}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{2-b}{3}+\frac{b-2}{5}\right)=\frac{2-b}{15}. \tag{2}$$

现在要由(1)、(2)消去b:

先由(1)得　　$b=\frac{1}{8}(1-15\bar{x})$。　　(3)

又由(2)得　　$b=2-15\bar{y}$。　　(4)

由(3)、(4)得　$\frac{1}{8}(1-15\bar{x})=2-15\bar{y}$,

整理上一方程,得线段AB的中点$P(\bar{x},\bar{y})$的轨迹是直线

$$\bar{x}-8\bar{y}+1=0.$$

[解完]

这个解法,要解两个二元一次方程组,又要计算出$\bar{x}$、$\bar{y}$,还要消去b,计算量较大,下面用代点法解,计算量小得多。

解法二　(代点法)

[将所给二直线方程相乘得$x^2-4y^2+2x+1=0$,再按代点法的基本步骤进行运算,即得所求轨迹方程是$\bar{x}-8\bar{y}+1=0$,请读者自己做。但根据本题特点,可灵活运用代点法如下。]

点$A(x_1,y_1)$在直线l_1上$\Rightarrow x_1-2y_1+1=0$。　　(1)

点$B(x_2,y_2)$在直线l_2上$\Rightarrow x_2+2y_2+1=0$。　　(2)

$$\left.\begin{array}{l}(1)-(2)\Rightarrow x_1-x_2-2(y_1+y_2)=0\\ \text{设}AB\text{的中点为}P(\bar{x},\bar{y})\Rightarrow y_1+y_2=2\bar{y}\end{array}\right\}\Rightarrow x_1-x_2=4\bar{y}. \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)+(2)\Rightarrow x_1+x_2-2(y_1-y_2)+2=0\\ x_1+x_2=2\bar{x}\end{array}\right\}\Rightarrow y_1-y_2=\bar{x}+1. \tag{4}$$