4

趣味数学丛书

趣味数学

代数

（供初中学生用）

汪江松　主编　　　　汪江松　杨世明　编著

湖北人民出版社

趣味数学（四）·代数

供初中学生用

汪江松　主编　　　汪江松　杨世明　编著

湖 北 人 民 出 版 社

鄂新登字 01 号

趣味数学丛书　　　　　　　　汪江松　主编
趣味数学(四)·代数　　　　　　汪江松　杨世明　编著

出版：
发行：湖北人民出版社
地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：仙桃市新华印刷厂
经销：湖北省新华书店
开本：787×1092 毫米 1/32
印张：6.5
字数：136 千字
插页：1
版次：1996 年 11 月第 1 版
印次：1996 年 11 月第 1 次印刷
印数：1－8 140
定价：6.50 元
书号：ISBN 7－216－01985－7/O·11

前　言

华罗庚教授早在1959年《人民日报》上发表的《大哉数学之用》中就精彩地叙述过，“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁”，无处不用数学。因此，我们从小都要学习数学，并且也都想学好数学。

但是数学这门古老而又严肃的科学，有的人学起来饶有兴趣，有的人却不免感到头疼。

要学好数学，首先必须喜爱数学。兴趣是最好的动力。一本好书，循循善诱，引人入胜，常常对启发青少年学习数学的兴趣，激发他们对数学的爱好，关系极大。为此，我们特组织编写了这套《趣味数学丛书》。

本丛书试图以一种特别的，富有浪漫色彩的笔调，用古往今来的一些有趣的故事或游戏，向你介绍数学。其中不少精彩之处，读来令人拍案叫绝，读后还觉得回味无穷，令人陶醉。如果你能够品尝出个中之味，或很想多问几个为什么，甚至想探讨一个究竟，这就达到了作者的目的：“数学这一学科如此的严肃，我们应当千方百计地把它趣味化”（法国数学家帕斯卡语）。兴趣将激发你喜爱或更爱数学。

需要说明的是，对有些趣题或游戏，只要求你看懂，会操作就行。如果你一时尚不能探讨出个究竟，相信你通过以后的学习和钻研，将会明白其中的奥妙。

本丛书在编写过程中，收录了各类趣味数学资料中的一些有代表性的问题，在此，向有关作者、译者和出版单位表示衷心的感谢。

本册由汪江松、杨世明执笔，全书由汪江松统稿、定稿。限于编者的水平，错误与不足之处在所难免，敬请广大读者赐教。

本册供初中学生使用。

汪江松

1996 年夏于武昌

目　　录

1. 负数与代数的由来 …………………… 〔1〕
2. 从"半斤八两"谈数进制 ………… 〔7〕
3. 五彩缤纷的自然数 ……………… 〔13〕
4. 哥德巴赫猜想 …………………… 〔20〕
5. 百万元巨奖征解数学题 ………… 〔24〕
6. "素数母机"与"素数筛" ……… 〔31〕
7. 红帽与黄帽 ……………………… 〔35〕
8. 幻方撷趣 ………………………… 〔40〕
9. 观察·猜想·证明 ……………… 〔47〕
10. 勾股数组与费马定理 …………… 〔54〕
11. 肇事汽车的车牌号 ……………… 〔62〕
12. 妇人洗碗 ………………………… 〔67〕
13. 农妇卖蛋 ………………………… 〔73〕
14. "牛吃草"问题 ………………… 〔78〕
15. 隔溪牧羊 ………………………… 〔82〕
16. 百钱买百鸡 ……………………… 〔88〕
17. 祖冲之数组 ……………………… 〔96〕
18. 孙子算题 ………………………… 〔99〕

19. 不合理的“正确” …………… 〔107〕
20. 为什么少了一元钱 …………… 〔112〕
21. 插值公式 …………… 〔116〕
22. 神探手智解难题 …………… 〔122〕
23. $\sqrt{2}$引发的千古奇冤 …………… 〔128〕
24. 第一个数学竞赛 …………… 〔132〕
25. 斐波那契点兔记 …………… 〔137〕
26. 黄金方程和连分数 …………… 〔144〕
27. 杨辉三角 …………… 〔150〕
28. 一纸比山高 …………… 〔159〕
29. 梵塔与世界末日 …………… 〔162〕
30. 皇后登山 …………… 〔165〕
31. 八卦与二进制 …………… 〔171〕
32. 古环探趣 …………… 〔176〕
33. 死里逃生 …………… 〔181〕
34. 小船巧渡 …………… 〔189〕
35. “最优化”趣谈 …………… 〔194〕

1 负数与代数的由来

负数是正数的对立面，正、负概念本来是客观世界广泛存在的相反意义量的两个方面，但是人类认识负数却有一个相当长的过程．在负数未被人类认定之前，要表示相反意义的量，人们只要在同一个数的前面注上两个相反意义的词就可以了．如买进500克与卖出500克，盈利10元与亏损10元，这并不引起人们的注意．

从历史上看，负数产生的直接原因是由于解方程的需要．

世界上最早最详细记载负数概念和运算法则的，是我国的《九章算术》中的第八章“方程”．

《九章算术》简称《九章》，是我国现存稍晚于《周髀算经》的一部数学经典，堪与希腊数学名著欧几里得《几何原本》相媲美．书中汇集了春秋战国、秦汉以来的数学成果，编成246个数学问题及解答．按题性列为：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股共九章．

《九章》是自公元前两个世纪至公元1世纪的300余年间经多人之手而相继完成的．后又经多人研究注释，唯以魏晋时期的数学家刘徽注最为珍贵．其注文与《九章》一起标志中国古代数学的光辉成就．他的不少思想和成果都渗透在我们的学习内容之中．

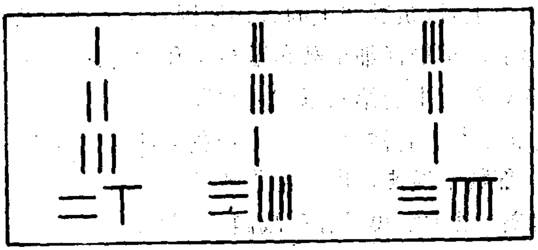
《九章》的第八章“方程”的第一题是：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何？

“禾”是稻谷，“实”是稻粒，“一秉”是一捆的意思. 那么题目的意思就是：

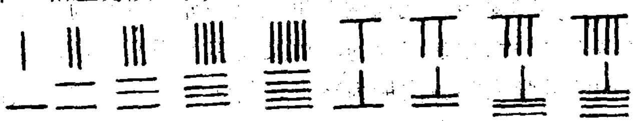
有上等稻谷三捆，中等稻谷二捆，下等稻谷一捆，可打谷粒三十九斗；……. 问上、中、下等稻谷每捆可打多少谷粒？

此题按今天的方法可列成一个方程组来算，可当时没有“用字母代数”的方法.《九章》中“方程术”把它用“算筹”（用来计算的小棍），摆成如下的表：



中国的筹码记数是十进位记数法，且有纵、横二式，其形如下（相应为从 1 到 10）

纵式



横式

这样，将上表的意思翻译出来，就是：

	左行	中行	右行
上禾	1	2	3
中禾	2	3	2
下禾	3	1	1
实	26	34	39

用今天的方程组表示就是

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & ① \\ 2x+3y+z=34 & ② \\ z+2y+3z=26 & ③ \end{cases}$$

其中 x，y，z 分别为上、中、下禾一秉谷粒的斗数.

用《九章》中的直除法消元（类似于加减消元）. 若先消去 z，①—②中就出现 2y—3y 等. 在其它方程中还出现从零减去正数的情况，这样就必须引进负数.

《九章》中的“正负术”就是紧接着这些题目之后提出的，这是世界数学史上最卓越的成就之一. 如何用算筹来表示正负数呢？刘徽有一个说明：“今两算得失相反，要令正负以名之. 正算（筹）赤，负算（筹）黑. 否则以邪（斜）正为异.”这就是说，对相反意义的量，用正负加以区别，可用不同的颜色表示正负，或以算筹的斜放和正放来区别.

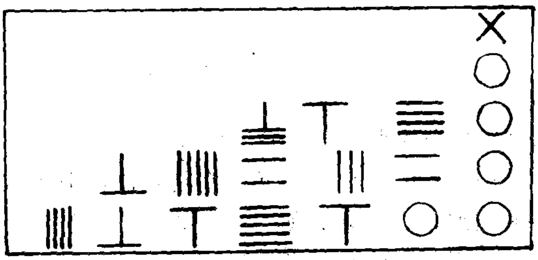
唐、宋时期随着印书的出现，算筹的正负表示法过渡到了数学符号表示法. 如用红色数码表示正，黑色数码表示负. 也有在数字后面标上正、负字样的. 如“—25”写成“二十五负”，“256”写成“二百五十六正”等.

在对解方程研究出现负数的同时，也出现了解方程的一般法则. 如金元时代的李冶（1192—1279）创造的“天元

术”. 李冶在他的著作《测圆海镜》一书中，介绍了一元高次方程的列法．其中有“立天元一为某某”，这几乎和现在的“设 x 为某某”一样了，即设未知数．现以其卷七第二题为例，原文是：

假令有圆城一所，不知周径，四面开门．或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之．问径几何？

他仍是通过筹算逐步列出方程为



上面方框中的记法就是多项式的记法（加斜划的表示负数项），各行依次为四次五项式的系数，其所表示的方程为

$$-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$$

解得　$x=120$（步）．

这里明确地用加斜划表示负数项，以及求解一元四次方程．李冶当时对数学的研究达到这样的深度是相当不简单的．

李冶原名李治，号敬斋，河北栾城人．曾任钧州（今河南禹州）知事．他读书广泛，治学勤奋，曾于山上草堂讲学，很多人拜他为师．李冶在《测圆海镜》中提出了六七百条几何命题，其中有 170 余条属于勾股容圆问题．他还在《益古演段》这本著作中专门研究各种平面图形的面积关系，每道

题都用“天元术”和“演段术”(即等积变换)两种方法求解.他这两部著作是中国古代数学典籍的珍品.

进入 14 世纪，寓居燕山（北京附近）的朱世杰（13 世纪—14世纪，字汉卿，号松庭)，精通《九章算术》、“旁通诸术”. 1303 年时，他已“以数学名家周游湖海 20 余年”. 他是中国古代第一个以数学为专业的职业数学家和数学教育家. 在他的著作《四元玉鉴》中，以天、地、人、物（相当于现在的 x、y、z、w）为四个未知量，推广了李冶的“天元术”而建立了四元高次方程理论，也蕴含着极其宝贵的代数思想.

李冶和朱世杰的成就在当时是遥遥领先于世界的. 事实上，欧洲的数学家们，直到 16、17 世纪才达到他们于 13 世纪末的“水平”. 但无论如何，他们都没有用一个符号或字母来表示未知数，因而始终受到局限. 那当然不如我们今天用字母表示（未知）数，列方程，解方程这样书写简单明了，演算和变换自如. 但我们的方法是从他们那里演变过来的，是他们的心血和智慧的结晶.

世界各国对负数的认识和接受也有一个过程. 如 1484 年法国数学家曾得到二次方程的一个负根，但他不承认它，说负数是荒谬的数. 1545 年卡尔丹（Cardano，1501—1576）承认方程中可以有负根，但认为它是“假数”. 直到 1831 年，还有数学家认为负数是“虚构”的. 他还特意举了一个“特例”来说明他的观点：“父亲 56 岁，他的儿子 29 岁，问什么时候父亲的岁数将是儿子的 2 倍?”列方程解这个问题是 $56+x=2\ (29+x)$，得 $x=-2$，他认为这个结果是荒唐的. 他不懂得 $x=-2$ 正是说两年前父亲的岁数是儿子岁数的 2 倍.

至于“代数”，是“algebra”的译名. 1859 年我国清代后期数学家李善兰（1811—1882）同另一英国传教士把“algebra”翻译为“代数”，意思为“以符号代替数的学科”，并流传至今. 李善兰在他的代数译著中，还创立了许多数学名词，如多项式，方程式，系数，函数，微分，积分等等.

2 从“半斤八两”谈数进制

在日常生活中，人们常将某两个人在某一方面彼此差不多，不分上下，用“半斤八两”这一成语来比喻，这是怎么回事呢？原来，过去我国的量衡制长期是十六进制：1斤＝16两，这样半斤就是八两.

然而我们总习惯于十进制的记数，这与人类长期掰手指记数的习惯分不开. 其实五进制比十进制出现得更早. 因为在一般情况下，伸出一只手比伸出一双手要方便自然，所以借用一只手的手指作计数器. 时至今日尚可从罗马记数法中看到五进制的痕迹，如罗马文记数

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，

就反映出Ⅴ是基础单位，6，7，8是在5的基础上再加1，2，3.

此外还有十二进制，十六进制，六十进制在世界上也都很通行. 如一“打”就是十二进制，在英制中，1呎＝12吋，1先令＝12便士. 还有一年为十二个月等等. 在欧洲，1俄尺＝16俄寸，1磅＝16英两等也与我国相仿. 至于六十进制产生得也很早，距今已四五千年的历史，巴比伦人就是较早采用60进制的. 还有现在通用的1分钟为60秒，角度中的1度＝60分等.

由于电子元件的通电和关闭是一种二值情况，所以实行

二进制记数十分方便，这在电子计算机的设计和使用上具有重大的实际意义．由于在二进制中，“满二进一”，所以用二进制写出的自然数数列是

1，10，11，100，101，110，111，1000，1001，1010，1011，1100，1101，…

其实，二进制最早出现在我国．公元前6、7世纪以前我国的古书《周易》中就记载：“易生太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”，这正是

$$2^0=1，2^1=2，2^2=4，2^3=8$$

这串二进制中各数位的值．

我们十分熟悉，在十进制中

$$73452_{(10)}=7\times10^4+3\times10^3+4\times10^2+5\times10+2;$$

同样，对“n”进制，

$$abcde_{(n)}=a\times n^4+b\times n^3+c\times n^2+d\times n+e,$$

从而可以转化为十进制数．

现在我们来用二进制做一个游戏．

我只知道张兴同学的生日是这个月，但究竟在哪一天我也不清楚，他本人又不愿意泄漏这个秘密．我就预先做好了五张卡片：

(A)	1，3，5，7，9，11，13，15， 17，19，21，23，25，27，29，31
(B)	2，3，6，7，10，11，14，15， 18，19，22，23，26，27，30，31
(C)	4，5，6，7，12，13，14，15， 20，21，22，23，28，29，30，31

(D)	8，9，10，11，12，13，14，15， 24，25，26，27，28，29，30，31
(E)	16，17，18，19，20，21，22，23， 24，25，26，27，28，29，30，31

我请张兴同学按从（A）到（E）的顺序看这五张卡片上有没有他的生日．如果“有”，我记上“1”，如果“没有”，我记上“0”．

结果他的回答是：

(A)卡“没有”→0， (B)卡“有”→1，

(C)卡“有”→1， (D)卡“没有”→0，

(E)卡“有”→1.

我立即说，你的生日是本月 22 日，到时我会给你一个惊喜．

卫宁同学马上说，我的生日只在前三张卡片上有，那你猜我的生日是几号？

我立即说（不用看卡片）“是 7 号”！

你知道这其中有什么奥妙吗？

其实道理很简单：在二进制中（从右数起），(A)卡上的数最末位都是“1”，(B)卡中第二位都是“1”；(C)卡中第三位都是“1”，(D)卡中第四位都是“1”，(E)卡中第五位都是“1”．

所以张兴的生日由二进制换成十进制：

$$10110_{(2)}=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2+0$$
$$=22_{(10)}.$$

而卫宁同学的生日

$$111_{(2)}=2^2+2^1+1=7.$$

啊，原来如此，下面看看两例：

例 1 某军需仓库保管员，将 1000 发子弹分放在 10 个盒子中，一旦需要，只需告诉他 1000 以内的任何子弹数，他只需拿出若干盒子就可迅速凑出所需要的子弹，而不必去一一地数．试问：这 10 个盒子里各装多少发子弹？

解 因为 $2^0=1$，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$2^6=64$，$2^7=128$，$2^8=256$，

又 $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$

$=511$（发）

$1000-511=489$（发）

保管员可将 2^0，2^1，2^2，…，2^9 发子弹分别装在 9 个盒子里面，剩下的 489 发子弹装在第 10 个盒子里面．

当所需要的子弹数小于 512 发时，可由前 9 个盒子中的若干个来凑齐；当所需子弹数大于 512 发时，可先取第 10 个盒子，其余不足部分由前 9 个盒子排若干盒来补足．

例 2 在某种进制记数中，24 的平方是 554，问：这是多少进位制？

解 设为 n 进位制，将它化为 10 进制

$\because$ $24^2_{(n)}=(2n+4)^2=4n^2+16n+16$

又 $554_{(n)}=5n^2+5n+4$

$\therefore$ $4n^2+16n+16=5n^2+5n+4$，

$n^2-11n-12=0$，$(n-12)(n+1)=0$

$\therefore$ $n=12$，$n=-1$（舍去）．

答 这是 12 进制．