

航空高等院校教材

偏微分方程差分解法

戴嘉尊 编



航空专业教材编审组

偏微分方程差分解法

戴嘉尊 编

航空专业教材编审组

内 容 简 介

本书包括抛物型方程差分方法、双曲型方程特征线法、差分方法和椭圆型方程差分方法共三章。

每章后面都附有一定数量的习题。

运用于工学类研究生；适用于理工科院校从事计算数学与应用数学教学与科研人员参考；亦可供有关工程技术人员参考。

偏 微 分 方 程 差 分 解 法

戴 嘉 尊 编

航空专业教材编审组出版

南京航空学院印刷厂印装

787×1092 1/16 印张10 252.8千字

1986年6月第一版 1986年6月第一次印刷 印数001—800册

统一书号：51254j 定价：1.70元

前 言

本书是在1983年至1985年这一期间为工学类研究生开设“偏微分方程数值解法”课程讲义的基础上修改而成的。它适用于工学类研究生，也适用于从事偏微分方程数值解法工作的有关科技人员参考；对理科从事计算数学教学与研究的同志亦可参考。

全书讲授约需60学时。

本书包括抛物型方程差分方法、双曲型方程特征线法、差分方法和椭圆型方程差分方法共三章。

本书内容较丰富、全面；取材比较新颖；重视基本理论、基本训练，有一定的理论深度；注意理论联系实际；全书自成系统；注意教学法。

每章后面配有一定数量的习题供读者练习。

本书在编写过程中得到我院周树荃教授的大力支持和帮助，编者在此深表谢意。

本书承北京航空学院颜庆津副教授详细审阅，提供了宝贵意见，谨此致谢。

由于编写时间匆迫，加之水平所限，书中一定有许多缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 抛物型方程	(1)
1—1 差分格式建立的基础.....	(1)
1—2 显式差分格式.....	(6)
1-2-1 一维常系数热传导方程的古典显式格式.....	(6)
1-2-2 系数依赖于 x 的一维热传导方程的显式格式.....	(8)
1—3 隐式差分格式.....	(10)
1-3-1 古典隐式格式.....	(10)
1-3-2 Crank—Nicolson 隐式格式.....	(11)
1-3-3 加权六点隐式格式.....	(12)
1-3-4 系数依赖于 x, t 的一维热传导方程的一个隐式格式的推导.....	(13)
1—4 解三对角形方程组的追赶法.....	(14)
1—5 差分格式的稳定性 and 收敛性.....	(17)
1-5-1 问题的提出.....	(17)
1-5-2 ε —图法.....	(19)
1-5-3 稳定性定义, 稳定性分析的矩阵方法.....	(20)
1-5-4 Gerschgorin 定理及其在分析差分格式稳定性中的应用.....	(30)
1-5-5 稳定性分析的 Fourier 级数法 (von Neumann 方法).....	(34)
1-5-6 低阶项对稳定性的影响.....	(42)
1-5-7 差分格式的收敛性.....	(43)
1-5-8 相容逼近, Lax 等价性定理.....	(44)
1—6 非线性抛物型方程的差分解法举例.....	(45)
1-6-1 Richtmyer 线性化方法.....	(45)
1-6-2 Lees 三层差分格式.....	(47)
1-6-3 算例.....	(48)
1—7 二维抛物型方程的差分格式.....	(48)
1-7-1 二维抛物型方程, 显式差分格式.....	(48)
1-7-2 隐式差分格式.....	(51)
1-7-3 差分格式的稳定性分析.....	(52)
1—8 交替方向隐式差分格式 (ADI 格式).....	(55)
习题	(60)

第二章 双曲型方程	(63)
2—1 一阶拟线性双曲型方程的特征线法.....	(63)
2-1-1 一阶线性方程, 特征线及 Cauchy 问题的解法.....	(63)
2-1-2 一阶拟线性方程 Cauchy 问题的特征线法.....	(64)
2—2 一阶拟线性双曲型方程组的特征线法.....	(66)
2-2-1 一阶拟线性双曲型方程组, 特征, 正规形式.....	(66)
2-2-2 举例.....	(68)
2-2-3 两个未知函数情形的特征线法.....	(70)
2—3 一阶双曲型方程差分方法.....	(76)
2-3-1 Friedrichs—Lax 格式.....	(76)
2-3-2 Courant—Isaacson—Rees 格式.....	(77)
2-3-3 Leap—Frog 格式 (蛙跳格式)	(80)
2-3-4 Lax—Wendroff 格式.....	(81)
2-3-5 Crank—Nicolson 格式.....	(82)
2—4 一阶双曲型方程组的差分方法.....	(82)
2-4-1 Friedrichs—Lax 格式.....	(83)
2-4-2 Courant—Isaacson—Rees 格式.....	(84)
2-4-3 Courant—Friedrichs—Lewy 条件.....	(86)
2—5 非线性守恒律, Lax-Wendroff 差分格式.....	(88)
2—6 守恒律方程组的一些常用差分格式.....	(90)
2-6-1 Friedrichs—Lax 格式.....	(90)
2-6-2 两步 Lax—Wendroff 格式.....	(90)
2-6-3 MacCormack 格式, 两步 Lax—Wendroff 格式的推广.....	(91)
2—7 多空间变量的一阶双曲型方程组 Lax—Wendroff 格式及 strang 格式	(93)
2—8 两个空间变量守恒律方程组的多步计算格式.....	(96)
2—9 两步 Lax—Wendroff 差分格式应用于气体动力学方程组的稳定性分析	(98)
2—10 二阶线性双曲型方程差分方法.....	(102)
2-10-1 显式差分格式.....	(102)
2-10-2 隐式差分格式.....	(105)
习题	(106)
第三章 椭圆型方程	(109)
3—1 正方形区域中的 Laplace 方程 Dirichlet 边值问题的差分模拟.....	(109)
3—2 Neumann 边值问题的差分模拟.....	(111)
3—3 混合边值条件.....	(114)
3—4 非矩形区域.....	(116)

3—5	极坐标形式的差分格式.....	(117)
3—6	矩形区域上的 Poisson 方程的五点差分逼近的敛速分析.....	(118)
3—7	一般二阶线性椭圆型方程差分逼近及其性质研究.....	(121)
3—8	椭圆型差分方程的迭代解法.....	(129)
3-8-1	迭代法的基本理论.....	(130)
3-8-2	Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代.....	(132)
3-8-3	椭圆型方程差分格式的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代收敛速度计 算举例.....	(134)
3-8-4	超松弛迭代法.....	(138)
3-8-4-1	逐次超松弛迭代法.....	(138)
3-8-4-2	相容次序、性质(A)和最佳松弛因子的确定.....	(139)
3-8-4-3	收敛速度.....	(145)
习题.....		(147)
参考书目.....		(150)

第一章 抛物型方程

自然科学和工程技术领域的许多问题需要求抛物型方程的数值解。

本章, 我们研究线性抛物型方程的差分解法, 主要讨论差分方程的构造方法和有关的理论问题以及研究方法等, 重点在于一维线性抛物型方程的差分方法, 对于非线性以及多维抛物型方程的差分解法也进行了研究。

众所周知, 一维线性抛物型方程的一般形式为

$$\sigma(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u \quad (1.1)$$

其中 $\sigma(x,t), a(x,t) > 0, c(x,t) \geq 0, (x,t) \in \Omega$, Ω 为 xt 平面上某一区域。通常考虑的定义问题有:

i) 初值问题 (或称 Cauchy 问题)

在区域 $\Omega = \{(x,t) | -\infty < x < +\infty, 0 < t \leq T\}$ 上求函数 $u(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \text{方程 (1.1)} & (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (1.2)$$

条件 (1.2) 称为初始条件, $\varphi(x)$ 为给定的初始函数。

ii) 初边值问题 (或称混合问题)

在区域 $\Omega = \{(x,t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 上求函数 $u(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \text{方程 (1.1)} & (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = \psi_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(1,t) = \psi_2(t) & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\quad (1.4)$$

条件 (1.4) 称为边值条件。

以下研究它们的差分解法。

1—1 差分格式建立的基础

为了构造微分方程 (1.1) 的有限差分逼近, 首先将求解区域 Ω 用两组平行于 x 轴和 t 轴的直线构成的网格复盖, 网格边长在 x 方向为 $\Delta x = h$, 在 t 方向为 $\Delta t = k$, 如图 1—1 所示, h, k 分别称为沿空间方向和时间方向的步长, 网格线的交点称为网格的结点。对初值问题来说, 网格是

$$\begin{aligned} t_n &= nk & n &= 0, 1, 2, \dots, N; \quad N = \left[\frac{T}{k} \right] \\ x_m &= mh & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

在 $t=0$ 上的结点称为边界结点, 属于 Ω 内的结点称为内部结点。

对于边值问题, 设 $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, 则网格是

$$t_n = nk \quad n = 0, 1, 2, \dots, N; \quad N = \left[\frac{T}{k} \right]$$

$$x_m = mh \quad m = 0, 1, 2, \dots, M; \quad Mh = 1$$

在 $t=0$, $x=0$, $x=1$ 上的结点称为边界结点, 属于 Ω 内的结点称为内部结点。

差分方法就是在网格结点上求出微分方程解的近似值的一种方法, 因此又称为网格法。

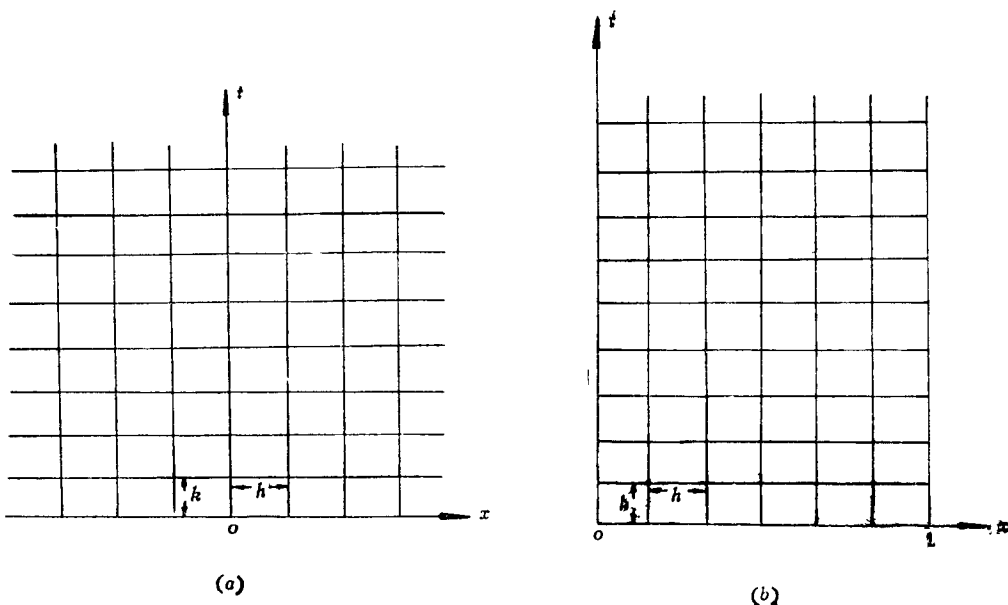


图 1-1

以下, 研究构造逼近微分方程的差分方程的方法。作为第一步, 我们研究导数的差商近似表达式。为此对二元函数 $u = u(x, t)$ 定义 $u_m^n = u(x_m, t_n)$, 且假定 $u = u(x, t)$ 具有我们需要的有界偏导数。由 Taylor 展开

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots$$

$$u(x_{m-1}, t_n) = u(x_m, t_n) - \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n + \dots$$

则 u 在 (x_m, t_n) 处对 x 的一阶偏导数的三个可能的近似表达式为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \approx \frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \approx \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n \approx \frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{2h} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad (1.7)$$

等式右边分别是函数 $u(x, t)$ 在 (x_m, t_n) 点关于 x 的向前差商, 向后差商, 中心差商。显然, 用差商近似导数存在误差, 令

$$E_m^n = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \quad (1.8)$$

则

$$E_m^n = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_\varepsilon^n = O(h) \quad m < \xi < m+1$$

E_m^n 称为截断误差, $E_m^n = O(h)$, 称截断误差阶为 $O(h)$ 。显然, 用向后差商近似导数的截断误差阶也为 $O(h)$, 而中心差商近似导数的截断误差阶为 $O(h^2)$ 。

关于导数的近似差商表达式, 也可以通过线性算子作为推导工具得到, 定义:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} && \text{为 } x \text{ 方向偏导数算子} \\ T_x &&& \text{为 } x \text{ 方向位移算子,} \\ &&& T_x u_m^n = u_{m+1}^n, \quad T_x^{-1} u_m^n = u_{m-1}^n \\ \mu_x &&& \text{为 } x \text{ 方向平均算子,} \\ &&& \mu_x u_m^n = \frac{1}{2} (u_{m+\frac{1}{2}}^n + u_{m-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned}$$

及如下 x 方向的差分算子

$$\text{前差算子 } \Delta_x \quad \Delta_x u_m^n = u_{m+1}^n - u_m^n \quad (1.9)$$

$$\text{后差算子 } \nabla_x \quad \nabla_x u_m^n = u_m^n - u_{m-1}^n \quad (1.10)$$

$$\text{中心差算子 } \delta_x \quad \delta_x u_m^n = u_{m+\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n \quad (1.11)$$

现在建立差分算子和导数算子之间的关系, 由 Taylor 展开

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n &= u_m^n + \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n + \cdots \\ &= \left[I + \frac{h}{1!} D_x + \frac{h^2}{2!} D_x^2 + \cdots \right] u_m^n \\ &= \exp(hD_x) u_m^n \end{aligned}$$

I —恒等算子

由

$$u_{m+1}^n = T_x u_m^n$$

因此

$$T_x = \exp(hD_x) \quad (1.12)$$

或者

$$hD_x = \ln T_x \quad (1.13)$$

因为

$$\Delta_x = T_x - I \quad T_x = \Delta_x + I$$

故

$$hD_x = \ln(I + \Delta_x) = \Delta_x - \frac{1}{2} \Delta_x^2 + \frac{1}{3} \Delta_x^3 - \cdots \quad (1.14)$$

同理

$$hD_x = -\ln(I - \nabla_x) = \nabla_x + \frac{1}{2} \nabla_x^2 + \frac{1}{3} \nabla_x^3 + \cdots \quad (1.15)$$

因为

$$\delta_x = T_x^{\frac{1}{2}} - T_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta_x = \exp\left(\frac{1}{2}hD_x\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}hD_x\right)$$

$$\delta_x = 2\sinh\left(\frac{1}{2}hD_x\right) \quad (1.16)$$

则

$$hD_x = 2\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta_x\right) = \delta_x - \frac{1}{2^2 3!} \delta_x^3 + \frac{3^2}{2^4 \cdot 5!} \delta_x^5 - \cdots \quad (1.17)$$

(1.14)、(1.15)、(1.17) 分别给出了偏导数算子关于前差、后差、中心差的级数表达式, 利用这些关系式就可给出偏导数的差分表达式

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n = \begin{cases} \left[\Delta_x - \frac{1}{2}\Delta_x^2 + \frac{1}{3}\Delta_x^3 - \dots\right]u_m^n & (1.18_1) \\ \left[\nabla_x + \frac{1}{2}\nabla_x^2 + \frac{1}{3}\nabla_x^3 + \dots\right]u_m^n & (1.18_2) \\ \left[\mu_x\delta_x - \frac{1}{3!}\mu_x\delta_x^3 + \frac{1}{30}\mu_x\delta_x^5 - \dots\right]u_m^n & (1.18_3) \end{cases}$$

又由

$$\begin{aligned} h^2 D_x^2 &= [\ln(I + \Delta_x)]^2 \\ h^2 D_x^2 &= [\ln(I - \nabla_x)]^2 \\ h^2 D_x^2 &= \left[2\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta_x\right)\right]^2 \end{aligned}$$

可得二阶偏导数的差分表达式

$$h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n = \begin{cases} \left[\Delta_x^2 - \Delta_x^3 + \frac{11}{12}\Delta_x^4 - \dots\right]u_m^n & (1.19_1) \\ \left[\nabla_x^2 + \nabla_x^3 + \frac{11}{12}\nabla_x^4 + \dots\right]u_m^n & (1.19_2) \\ \left[\delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \dots\right]u_m^n & (1.19_3) \end{cases}$$

对于三阶、四阶偏导数的差分表达式为

$$h^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_m^n = \begin{cases} \left[\Delta_x^3 - \frac{3}{2}\Delta_x^4 + \frac{7}{4}\Delta_x^5 - \dots\right]u_m^n & (1.20_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\nabla_x^3 + \frac{3}{2}\nabla_x^4 + \frac{7}{4}\nabla_x^5 + \dots\right]u_m^n & (1.20_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_x \left[\delta_x^3 - \frac{1}{4}\delta_x^5 + \frac{7}{120}\delta_x^7 - \dots\right]u_m^n & (1.20_3) \end{cases}$$

$$h^4\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_m^n = \begin{cases} \left[\Delta_x^4 - 2\Delta_x^5 + \frac{17}{6}\Delta_x^6 - \dots\right]u_m^n & (1.21_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\nabla_x^4 + 2\nabla_x^5 + \frac{17}{6}\nabla_x^6 + \dots\right]u_m^n & (1.21_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\delta_x^4 - \frac{1}{6}\delta_x^6 + \frac{7}{240}\delta_x^8 - \dots\right]u_m^n & (1.21_3) \end{cases}$$

从以上这些偏导数的差分表达式，我们可以得到偏导数的各种精度的近似表达式，例如在 $h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n$ 的前差表达式中取第一项，则有

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n \approx \Delta_x u_m^n = u_{m+1}^n - u_m^n$$

且

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n - (u_{m+1}^n - u_m^n) = -\frac{1}{2}\Delta_x^2 u_m^n + \frac{1}{3}\Delta_x^3 u_m^n - \dots$$

又由二阶导数的前差表达式 (1.19₁)

$$h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n \approx \Delta_x^2 u_m^n$$

因此

$$\bar{E}_m = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n - \frac{1}{h} (u_{m+1}^n - u_m^n) = O(h),$$

即截断误差阶为 $O(h)$ 。

表 1.1 列出了偏导数的差分近似式及相应的截断误差阶。

表 1.1 偏导数的差分近似及相应的截断误差阶

偏 导 数	有 限 差 分 逼 近	误 差 阶
$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n$	$\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}$	$O(h^2)$
	$-\frac{u_{m+2}^n + 4u_{m+1}^n - 3u_m^n}{2h}$	$O(h^2)$
	$-\frac{u_{m+2}^n + 8u_{m+1}^n - 8u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{12h}$	$O(h^2)$
$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n$	$\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$	$O(h^2)$
	$-\frac{u_{m+2}^n + 16u_{m+1}^n - 30u_m^n + 16u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{12h^2}$	$O(h^4)$
$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n$	$\frac{u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{2h^3}$	$O(h^2)$
$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n$	$\frac{u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{h^4}$	$O(h^2)$

现在研究构造微分方程 (1.1) 的差分方程的方法，为此写微分方程 (1.1) 为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x, t, D_x, D_x^2)u \quad (1.22)$$

L 是关于 D_x, D_x^2 的线性算子， $D_x = \partial / \partial x$ ，包括两个相邻时间层的网格结点的差分方程可以从 Taylor 展开式推出

$$\begin{aligned} u(x, t+k) &= \left(I + \frac{k}{1!} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \cdots \right) u(x, t) \\ &= \exp \left(k \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \end{aligned}$$

设 $x = mh$ ， $t = nk$ ， $u_m^{n+1} = u(mh, (n+1)k)$ ，于是

$$u_m^{n+1} = \exp \left(k \frac{\partial}{\partial t} \right) u_m^n \quad (1.23)$$

如果算子不依赖于 t ，即 $L = L(x, D_x, D_x^2)$ ，则

$$u_m^{n+1} = \exp(kL)u_m^n \quad (1.24)$$

将式 (1.17)， $D_x = \frac{2}{h} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{2} \delta_x \right)$ ，代入算子 L 中，即在 L 中用中心差分算子 δ_x 代替了微分算子 D_x ，于是有

$$u_m^{n+1} = \exp \left(kL(mk, \frac{2}{h} \sinh^{-1}(\frac{1}{2} \delta_x), (-\frac{2}{h} \sinh^{-1}(\frac{1}{2} \delta_x))^2 \right) u_m^n \quad (1.25)$$

目前通常用于解方程(1.1)的各种差分方程,都是方程(1.25)的近似表达式。下面各节,我们将以式(1.25)为基础,对简单的抛物型方程,推导一些常用差分格式。

对于用差分方法求偏微分方程的数值解来说,设计差分方程,用之作为微分方程的近似,仅仅是第一步。本章除致力于这一研究外,特别着重讨论了诸如差分格式的稳定性、收敛性等基本问题,它们也是本书研究的主要内容之一。

1—2 显式差分格式

现在,对抛物型方程(1.1)的几种特殊情况,从方程(1.25)出发,构造微分方程的有限差分近似。

1-2-1 一维常系数热传导方程的古典显式格式

首先考虑一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.26)$$

的差分近似,由此 $L=D_x^2$, 方程(1.24)为

$$u_m^{n+1} = \exp(kD_x^2)u_m^n \\ = \left[I + kD_x^2 + \frac{1}{2}k^2(D_x^2)^2 + \dots \right] u_m^n$$

代进式(1.19₃)

$$D_x^2 = \frac{1}{h^2} \left(\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 - \dots \right)$$

则

$$u_m^{n+1} = \left[I + r\delta_x^2 + \frac{1}{2}r(r - \frac{1}{6})\delta_x^4 + \frac{1}{6}r(r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{15})\delta_x^6 + \dots \right] u_m^n \quad (1.27)$$

其中 $r=k/h^2$ 为步长比。在上式中,如果仅仅保留二阶中心差分,且设 U_m^n 为相应差分方程解在结点 (mh, nk) 上的值,则

$$U_m^{n+1} = (I + r\delta_x^2)U_m^n \quad (1.28)$$

代进 δ_x^2 的表达式,则得差分方程

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (1.29)$$

因此,第 $n+1$ 时间层上任一结点 $(mh, (n+1)k)$ (为简单起见,以后记为 $(m, n+1)$) 处的值 U_m^{n+1} 可以由第 n 时间层上的三个相邻结点 $(m-1, n), (m, n), (m+1, n)$ 上的值 $U_{m-1}^n, U_m^n, U_{m+1}^n$ 决定。我们用图1—2表示这一差分格式。

因此,如应用格式(1.29)解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

则我们可以令 $U_m^0 = \varphi_0(mh)$, 连同格式(1.29)则可沿着 t 方向逐层把结点上的 U_m^n 值计算出来, 以此作为微分方程解在结点 (m, n) 处的值 u_m^n 的近似值。对初边值问题, 同样使用格式(1.29)连同初、边值条件把求解区域 Ω 中的网格结点上的 U_m^n 值计算出来, 作为微分方程初边值问题的近似解, 由于格式(1.29)关于 U_{m+1}^{n+1} 明显解出来, 所以称为显式差分格式。格式(1.29)称为解热传导方程(1.26)的古典显式格式。显然, 对于求解来说, 这种格式是最方便的, 然而下面将看到这种格式并不总是稳定的。

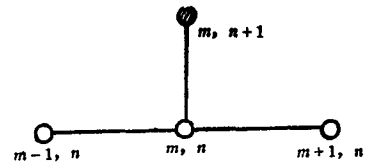


图 1—2

应该指出, 为了推导古典显式差分格式(1.29), 可简单地应用导数的差商近似表达式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n \approx \frac{1}{k}(u_m^{n+1} - u_m^n)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n \approx \frac{1}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)$$

代入微分方程(1.26), 并令差分方程解为 U_m^n 即可。虽然在边界结点上, 差分方程和微分方程具有相同的初值或者初边值条件, 但是, 一般而言, 结点 $(m, n+1)$ 上微分方程的精确解 u_m^{n+1} 和古典显式差分格式(1.29)的精确解 U_m^{n+1} 不相等, 它们之间的差记为 z_m^{n+1}

$$z_m^{n+1} = u_m^{n+1} - U_m^{n+1} \quad (1.30)$$

假定 $u(x, t)$ 具有下面推导中所需要的有界偏导数, 则由 Taylor 展开, 有

$$u_m^{n+1} = u_m^n + k \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_m^n + \frac{k^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_m^n + \dots$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_m^n +$$

$$+ \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_m^n + \frac{h^5}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_m^n + \dots$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_m^n +$$

$$+ \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_m^n - \frac{h^5}{120} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_m^n + \dots$$

则

$$u_m^{n+1} - (1-2r)u_m^n - r(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) = k \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n +$$

$$+ \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_m^n + \dots, \quad (1.31)$$

由(1.26), (1.29), (1.30), (1.31)得

$$z_m^{n+1} - (1-2r)z_m^n - r(z_{m+1}^n + z_{m-1}^n)$$

$$= -\frac{1}{2}k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_m^n + \dots \quad (1.32)$$

这就是 z_m^{n+1} 满足的方程。从(1.31)我们有

$$\frac{u_m^{n+1} - (1-2r)u_m^n - r(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n$$

$$= -\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n + \dots$$

或

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n$$

$$= -\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n + \dots \quad (1.33)$$

从而, 上式右边描写了古典显式差分格式(1.29)在 (m, n) 点对微分方程的近似程度定义为差分格式在点 (m, n) 的截断误差, 记为 R_m^n 。

$$R_m^n = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{6r} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_m^n + \dots \quad (1.34)$$

因为假定 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 在所考察的区域保持有界, 所以当 $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, $R_m^n = O(k + h^2)$ 。

古典显式差分格式的截断误差阶为 $O(k + h^2)$ 。从式(1.33)又可见到, 如令 $r = \frac{1}{6}$, 因

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

则截断误差 R_m^n 的阶可以提高, 事实上, 这时 $R_m^n = O(k^2 + h^4)$, 为了提高截断误差的阶, 我们也可用在式(1.27)中保留四阶中心差分项的办法达到, 这时有差分格式

$$U_m^{n+1} = \left[1 + r \delta_x^2 + \frac{1}{2} r \left(r - \frac{1}{6} \right) \delta_x^4 \right] U_m^n \quad (1.35_1)$$

或者

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2} (2 - 5r + 6r^2) U_m^n + \frac{2}{3} r (2 - 3r) (U_{m+1}^n + U_{m-1}^n)$$

$$- \frac{1}{12} r (1 - 6r) (U_{m+2}^n + U_{m-2}^n) \quad (1.35_2)$$

相应的截断误差阶为 $O(k^2 + h^4)$ 。通常, 格式可用图 1—3 表示。

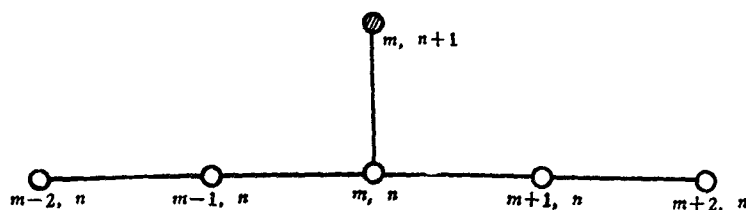


图 1—3

1-2-2 系数依赖于 x 的一维传热导方程的显式格式

考虑系数依赖于 x 的一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a(x) \neq 0 \quad (3.36)$$

这时 $L = a(x) D_x^2$ 。

方程(1.24)变成

$$\begin{aligned}
 u_m^{n+1} &= \exp(ka(x)D_x^2)u_m^n \\
 &= \left[1 + kaD_x^2 + \frac{1}{2}k^2aD_x^2(aD_x^2) + \dots\right]u_m^n \\
 &= \left[1 + kaD_x^2 + \frac{1}{2}k^2a(a''D_x^2 + 2a'D_x^3 + aD_x^4) + \dots\right]u_m^n
 \end{aligned}$$

此处 ' 表示对 x 求导 将微分算子 D_x^2 D_x^3 D_x^4 用差分算子代替, 则可得到相应的差分格式 上式保留右边前二项, 由 $D_x^2 \approx -\frac{1}{h^2}\delta_x^2$ 则有差分方程

$$U_m^{n+1} = (1 - 2ra)U_m^n + ra(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) \quad (1.37)$$

这一差分格式可用图 1-4 表示。

其中 $a = a(mh)$ 这是一个显式差分格式 其截断

误差阶为 $O(k + h^2)$ 。

进一步 考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad a(x) \neq 0 \quad (1.38)$$

的差分近似

由方程右边

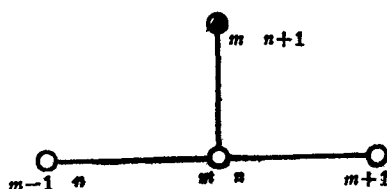


图 1-4

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a'(x) \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &= (a(x)D_x^2 + a'(x)D_x)u \\
 L &= a(x)D_x^2 + a'(x)D_x \\
 u_m^{n+1} &= \exp(k(aD_x^2 + a'D_x))u_m^n \\
 &= \left[1 + k(aD_x^2 + a'D_x) + \dots\right]u_m^n
 \end{aligned}$$

类似(1.37)的推导, 在上式中保留前二项, 并且 $D_x u_m^n$ 和 $D_x^2 u_m^n$ 分别用 $\frac{1}{2h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$ 和 $\frac{1}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)$ 代替 则得 差分方程

$$U_m^{n+1} = (1 - 2ra)U_m^n + r(a + \frac{1}{2}ha')U_{m+1}^n + r(a - \frac{1}{2}ha')U_{m-1}^n \quad (1.39)$$

此处 a a' 均在 $x = mh$ 处计算。

也可通过直接用中心差分算子 $\frac{1}{h}\delta_x$ 代替微分算子 $D_x = \partial/\partial x$ 的办法 获得方程(1.38)的差分近似

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k}(U_m^{n+1} - U_m^n) &= \frac{1}{h^2}\delta_x(a(x_m)\delta_x(U_m^n)) \\
 U_m^{n+1} &= \left\{1 - r \left[a\left(x_{m+\frac{1}{2}}\right) + a\left(x_{m-\frac{1}{2}}\right) \right] \right\} U_m^n + r \left[a\left(x_{m+\frac{1}{2}}\right) U_{m+1}^n \right. \\
 &\quad \left. + a\left(x_{m-\frac{1}{2}}\right) U_{m-1}^n \right] \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

这也是一个显式差分格式。

格式(1.39)和(1.40)的截断误差阶都是 $O(k + h^2)$ 。易见 由

$$a\left(x_{m+\frac{1}{2}}\right) \approx a(x_m) + \frac{1}{2}ha'$$

$$a(x_{m-\frac{1}{2}}) \approx a(x_m) - \frac{1}{2}ha'$$

代入格式(1.40)即为格式(1.39), 差分格式(1.40)的推导方法, 即在微分方程中直接用差分算子代替 $D_x, D_x^2, \dots$, 正如前面已经指出的是推导差分格式的一个常用方法。

显然, 微分方程(1.36)、(1.38)中的 $a(x)$ 如果为 $a(x, t)$, 即其自变量包括空间变量和时间变量, 这时差分格式(1.37)、(1.39)、(1.40)同样是微分方程的具有截断误差阶 $O(k+h^2)$ 的差分近似, 这时格式(1.37)、(1.39)中 $a=a(x_m, t_n), a'=a'_x(x_m, t_n)$, 格式(1.40)中 $a(x_{m+\frac{1}{2}}), a(x_{m-\frac{1}{2}})$ 分别换成 $a(x_{m+\frac{1}{2}}, t_n), a(x_{m-\frac{1}{2}}, t_n)$ 。

1—3 隐式差分格式

与显式差分格式不同, 隐式差分格式中包括了 $n+1$ 时间层上两个或两个以上结点处的未知值 (例如 $U_{m+1}^{n+1}, U_m^{n+1}, U_{m-1}^{n+1}$), 使用隐式差分格式和使用显式差分格式求解完全不同。相对而言, 使用隐式差分格式求解, 每一时间层包含有较多的计算工作量。从后面对差分格式的稳定性分析可知, 隐式格式的优点在于, 其稳定性要求对步长比的限制大为放宽, 而这正是我们所期望的。

1-3-1 古典隐式格式

现在对热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

推导其最简单的隐式差分逼近——古典隐式格式,

$$\text{由 } u_m^{n+1} = \exp(kD_x^2)u_m^n$$

$$\text{故 } \exp(-kD_x^2)u_m^{n+1} = u_m^n$$

$$\left(1 - kD_x^2 + \frac{1}{2}k^2D_x^4 - \dots\right)u_m^{n+1} = u_m^n$$

式中左边如果仅保留二阶导数项, 且以 $\frac{1}{h^2}\delta_x^2$ 替代 D_x^2 , 则得差分格式

$$\left(1 - \frac{k}{h^2}\delta_x^2\right)U_m^{n+1} = U_m^n$$

或者

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n \quad (1.41)$$

格式用图1—5表示。

其截断误差阶为 $O(k+h^2)$, 与古典显式差分格式相同。

为了求得第 $n+1$ 时间层上的 U_m^{n+1} 的值, 必须通过解线性代数方程组。这是一个隐式差分格式, 必须联合其初边值条件求解。格式(1.41)通常称为古典隐式格式。

我们也可通过直接用差分算子代替 D_x, D_x^2 的方法, 即

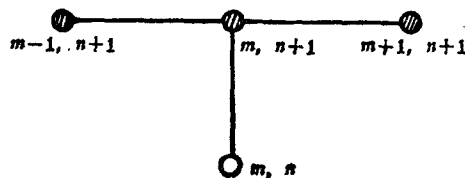


图 1—5