# 实变函数与泛函分析

（第二版）·上册

郭大钧　黄春朝　梁方豪　韦忠礼　编

SHIBIANHANSHUYU
FANHANFENXI

山东大学出版社
Shandong University Press

# 实变函数与泛函分析

（第二版）

上册

郭大钧　黄春朝　梁方豪　韦忠礼　编

山东大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

实变函数与泛函分析/郭大钧等编. —2版. —济南:山东大学出版社,2005.7

ISBN 7－5607－2987－8

Ⅰ. 实...

Ⅱ. 郭...

Ⅲ. ①实变函数—高等学校—教材②泛函分析—高等学校—教材

Ⅳ. 017

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第062009号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路27号　邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

山东旅科印务有限公司印刷

850×1168毫米　1/32　18.875印张　474千字

2005年7月　第2版　2005年7月第2次印刷

印数:5001－7000册

定价:36.80元(全两册)

## 内容提要

本书共分十四章.第一章至第六章是实变函数的内容(上册),包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、Riemann-Stieltjes 积分和 Lebesgue-Stieltjes 积分等,并且对抽象测度和积分作了介绍;第七章至第十四章是泛函分析的内容(下册),包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等,并且对抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数作了介绍.每章末尾附有相当数量的习题.

本书把以上内容分为基本的、非基本的两个方面.对基本内容写得较为细致详尽,特别注意做到深入浅出、直观易懂;对非基本内容,标题前加了 * 号,供选读.

本书可作为综合性大学和师范学院数学系《实变函数》、《泛函分析》两门课的教材或教学参考书,也可供数学爱好者自学这两门课之用.

# 第一版序

本书是根据我们在山东大学数学系多次讲授《实变函数》和《泛函分析》两门课的讲义合并、修改而成的.全书共分十四章.第一章至第六章是实变函数的内容,包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、有界变差函数与 Riemann-Stieltjes 积分等,其中以 Lebesgue 积分为重点;第七章至第十四章是泛函分析的内容,包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等.每章末尾附有相当数量的习题供选用.

据我们的实践,除去打 * 的内容外,实变函数部分可用 72 学时讲完,泛函分析部分可用 54 学时讲究。打 * 的内容包括抽象测度与抽象积分、抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数等,这些内容可以不讲或选讲或让优秀学生自学.

《实变函数》和《泛函分析》是数学系两门重要的专业基础课,它对于数学、计算数学、控制理论等专业都是必需的工具.《实变函数》课较之《数学分析》课,在观点和思想方法上有所飞跃,学生常感到困难.因此,我们在编写过程中注意了贯彻由浅入深、由特殊到一般、仔细分析来龙去脉等符合认识规律的原则.由于我们水平所限,书中错误和缺点在所难免,敬请广大读者批评指正.

郭大钧

1984 年 12 月于济南

# 第二版序

本书自1986年出版以来，一直作为山东大学数学系（院）《实变函数》和《泛函分析》两门大学生课的教材，至今已使用了近二十年. 现在的第二版基本上是第一版的重印，只对个别地方进行了修订. 在书的开头增加了“引言”部分，论述 Riemann 积分的局限性以及 Lebesgue 推广 Riemann 积分的思路. 作为附录，对数学家 Lebesgue 作了简介. 此外，为便于教学，我们将原书分为上下两册出版，上册是实变函数的内容（包括第一章至第六章）；下册是泛函分析的内容（包括第七章至第十四章）.

本书再版过程中，得到山东大学数学与系统科学学院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢. 第二版的出版，得到山东大学出版基金委员会的资助，特致谢意. 另外，庞常词、张晓燕、陈燕来三位博士对第二版打印稿进行了认真仔细的校阅，在此也表示感谢.

由于我们水平所限，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正.

郭大钧

2004年12月30日

于山东大学南院

# 目　录

## 上　册

# 引　言

实变函数的中心内容是 Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论，它是 Riemann(1826—1866)积分的推广与发展，创立于 20 世纪初期，为近代分析奠定了基础.

## (一) 谈谈 Riemann 积分

众所周知，Riemann 积分理论是数学分析教程的主要内容之一，它对数学理论本身的发展，对其他科学技术的应用都产生极其深远的影响，然而随着科学技术的发展，Riemann 积分的缺陷逐渐显露出来，这是实变函数理论产生的源动力. 下面主要谈 Riemann 积分的局限性.

**1. Riemann 积分的研究对象是"基本上"连续的函数**

设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数. 作分划

$$T: \ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

并令
$$M_i = \sup\{f(x): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\},$$
$$m_i = \inf\{f(x): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$
$$\overline{S_T} = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{S_T} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分：

$$(\text{上})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \inf_T \overline{S_T}, \quad (\text{下})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_T \underline{S_T}.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，记其值为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 称它为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的 Riemann 积分.

若令 $d(T)=\max\{x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n\}$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分必要条件是:

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0. \qquad (0\cdot 1\cdot 1)$$

函数的可积性是与(0·1·1)等价的,由于(0·1·1)式涉及到两个因素:分割小区间长度 $(x_i-x_{i-1})$ 以及函数在其上的振幅 $(M_i-m_i)$. 因此,为使(0·1·1)成立,粗略地说,就是在 $d(T)\to 0$ 的过程中,其振幅 $(M_i-m_i)$ 不能缩小的那些相应的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到,定义在 $[a,b]$ 上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值,从而是可积的).

由于函数振幅的大小与该函数的连续性有关,于是,条件(0·1·1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围. 这就是说,可积函数必须是"基本上"连续的,对那些很不连续的函数在 Riemann 积分意义下是不可积的. 例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus Q,\end{cases}$$

$Q$ 为 $[0,1]$ 中有理数点集,在 $[0,1]$ 上不是 $(R)$ 可积的. 这说明 $R$ 可积函数的范围太窄.

**2. 极限与积分次序交换时条件太苛刻**

在数学分析中,我们经常遇到的一个重要问题是两种极限过程的交换问题,尤其是积分与函数列的极限的交换问题. 我们知道,在一般微积分教科书中,都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换,不过,这一条件是太苛刻了.

**例 0·1** $f_n(x)=x^n \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$. 它是点收敛不是一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Riemann **积分有界收敛定理**：设

(i) $f_n(x)\quad(n=1,2,\cdots)$ 是定义在$[a,b]$上的可积函数；

(ii) $|f_n(x)|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$；

(iii) $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x\in[a,b],$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里，不仅受于条件(ii) 的限制，而且还必须假定极限函数 $f(x)$ 的可积性. 例 0·2 表明，即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性.

**例 0·2** 设$\{r_n\}$是$[0,1]$中全体有理数列，作函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \cdots, r_n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots$$

显然有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1,$$

且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

这里，每个 $f_n(x)$ 皆是$[0,1]$上 Riemann 可积函数且积分值为零，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

但极限函数 $f(x)$ 不是 Riemann 可积的，这是因为

$$(\text{上})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1,\quad (\text{下})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而也谈不上积分号下取极限的问题.

有界收敛定理看起来也有点使人惊异，因为我们不难证明，若有定义在 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$ 满足 $|f_n(x)|\leqslant M, |g_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), \lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x),$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x,$$

但 $f(x)$ 之积分仍然可以不存在. 然而，上述积分之极限并不依赖于本身，而依赖于 $f(x)$. 既然如此，不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了.

3. **微积分基本定理的应用受到限制**

微积分基本定理是微积分学的中枢：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微函数且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a),\ x\in[a,b].$$

显然，为使这一微积分基本定理成立，$f'(x)$ 必须是 $(R)$ 可积的. 但是，可微函数的导数未必可积. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$f'(x)$ 是无界函数，当然不可积. 其实，早在 1881 年，Volterra(1860 ~ 1940) 就作出了一个可微函数，其导函数是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的. 这就大大限制了微积分基本定理的应用范围.

4. **(R) 可积函数空间 R([a,b]) 不完备性**

Riemann 积分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性，我们知道，在积分理论中，函数类用距离

$$\rho(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\left(或\ \rho(f,g)=\left\{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}等\right)$$

作成距离空间是完备的这一事实具有重要意义. 近代泛函分析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性.

**例 0·3**　记 $R([0,1])$ 为$[0,1]$上 Riemann 可积函数的全体. 引进距离

$$\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x,f,g\in \mathrm{R}([0,1])$$

(其中认定当 $\rho(f,g)=0$ 时,$f$ 与 $g$ 是同一元). 我们说 $R([0,1])$ 不是完备的意思,是指当 $f_n\in R([0,1])(n=1,2,\cdots)$ 且满足

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(f_n,f_m)=0$$

时,并不一定存在 $f\in R([0,1])$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0.$$

可以证明:$R([0,1])$ 不是完备的. 事实上,令$\{r_n\}$ 是$(0,1)$ 中有理数的全体,设 $I_n$ 是$[0,1]$中的开区间,$r_n\in I_n$,$|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$,并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n,\\0,\ x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\end{cases}$$

和函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1,\ x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k,\\0,\ x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k,\end{cases}$$

则 $f_n(x)\in R([0,1])$,且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\rho(f_n,f_m)=0,以及\ f_n(x)\to f(x)(n\to\infty),$$

但 $f(x)$ 在$[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 上是不连续的,它不是 Riemann 可积的,且不存在 Riemann 可积函数 $g(x)$,使得 $\rho(f,g)=0$,即不存在 $g\in R([0,1])$,使 $\rho(f_n,g)\to 0$. 故 $R([0,1])$ 按上述距离 $\rho$ 是不完备的.

## (二) Lebesgue 积分思想简介

对于定义在$[a,b]$上的函数,为使 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,按照 Riemann 的积分思想,必须使得在划分$[a,b]$后,$f(x)$ 在多数小区间 $\Delta x_i$ 上的振幅足够小,这迫使具有较多激烈振荡的函数被排除在可积函数类外. 对此,Lebesgue 提出,不从分割区间入手,而是从分割函数值域着手,即给 $\delta>0$,作划分

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=M,$$

其中,$y_i-y_{i-1}<\delta$,$m,M$是$f(x)$ 在$[a,b]$上的下界与上界. 并作集

$$E_i=\{x\,|\,y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\},i=1,2,\cdots,n.$$

这样,在 $E_i$ 上,$f(x)$ 的振幅就不会大于 $\delta$. 再计算 $|I_i|=$"矩形面积"$=$"高"$y_{i-1}\times$"底边长度"$|E_i|$,并作和

$$\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\,|E_i|=\sum_{i=1}^{n}|I_i|.$$

它是 $f(x)$ 在$[a,b]$上积分(面积)的近似值. 然后,让 $\delta\to 0$,且定义

$$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\,|E_i|.$$

(如果此极限存在)也就是说,采取在 $y$ 轴上的划分来限制函数值变动的振幅,即按函数值的大小先加以归类. Lebesgue 对这一设计作了生动的譬喻,大意如下:假定我欠人家许多钱,现在要归还. 此时,应先按照钞票的票面值的大小分类,再计算每一类的面额总

值，然后相加，这就是我的积分思想；如果不管面值大小如何，而是按某种先后次序（如顺手递出）来计算总数，那就是 Riemann 积分的思想.

当然，按照 Lebesgue 积分构思，会带来一系列的新问题. 首先，分割函数值范围后，所得的点集

$$E_i = \{x \mid y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, i = 1,2,\cdots,n.$$

不一定是一个区间，也不一定是互不相交的有限个区间的并，而可能是一个分散而杂乱无章的点集及其并集. 因此，所谓“底边长度”$|E_i|$的说法是不清楚的，即如何度量其“长度”均成问题. 这促使 Lebesgue 去寻找一种测量一般点集“长度”的方案，并称点集 $E$ 的“长度”为测度，记为 $m(E)$. 当然，这一方案必须满足一定的条件，才符合常理. 如 $E = [0,1]$ 时，应有

$$m(E) = m([0,1]) = 1;$$

又如 $E_1 \subset E_2$，应满足

$$m(E_1) \leqslant m(E_2);$$

特别是对 $E_n(n = 1,2,\cdots)$ 且 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$ 时，希望有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

然而，这些限制使人们无法设计出一种测量方案，能使一切点集都有度量. 因此，欲使 Lebesgue 积分思想得以实现，必要求分割点集 $E_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是可测量的——可测集. 这一要求能否达到，与所给函数 $y = f(x)$ 的性质有关. 从而规定：凡是对任意 $a \in R^1$，点集

$$E = \{x \mid f(x) > a\}$$

均为可测集时，称 $f(x)$ 为可测函数. 这就是说，积分的对象必须属于可测函数范围.

**注** Lebesgue 积分论仍有其不足之处，例如，在 Lebesgue 积分的意义下，广义积分$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 是不存在的，等等.

# 第一章　集　合

集合论创始自德国数学家 Cantor，从 19 世纪末叶逐渐发展到今天，它不仅成为数学的一个分支，而且是全部数学的基础. 本章讲述集合论的初步知识，作为实变函数论的基础.

## §1·1　集合·集合的运算

### 1·1·1　集合

集合是数学中的一个基本概念，要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情. 正像几何学中“点”、“直线”、“平面”一样，“集合”这个概念必须用若干公理组成的公理系来规定. 目前，对“集合”这个概念有两种不同的规定，一种是 Zermelo 等人作出的 ZFC 公理系，另一种是 Bernays 等人作出的 BNG 公理系. 这里不准备纠缠“集合”这个概念的严格规定，而只给出如下朴素的说法：一定范围内的所有个体事物，当把它们看作一个整体时，这个整体称为一个**集合**（或**集**），而其中的每一个个体事物称为这个集合的**元素**（或**元**）. 一个集合的各个元素必须是彼此相异的；哪些个体事物是给定集合的元素必须是确定无疑的. 下面我们举出集合的几个例子.

**例 1·1·1**　自然数的全体（称为**自然数集**，通常记作 N）.

**例 1·1·2**　实数的全体（称为**实数集**，即 $R^1$）.

**例 1·1·3**　小于 1 的正数的全体（即开区间 $(0,1)$）.