



北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

金融数学 引论

吴岚 黄海 编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

金融数学引论

吴 岚 黄 海 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

金融数学引论/吴岚,黄海编著. —北京:北京大学出版社,2005.8
(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-08373-4

I. 金… II. ①吴… ②黄… III. 金融-经济数学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 126043 号

书 名: 金融数学引论

著作责任者: 吴 岚 黄 海 编著

责任编辑: 曾琬婷

标准书号: ISBN 7-301-08373-4/O · 0628

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特打字服务社 82350640

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890mm×1240mm A5 11.875 印张 340 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 19.50 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

名誉主编：姜伯驹

主 编：张继平

副主编：李 忠

编 委：(按姓氏笔画为序)

王长平 刘张炬 陈大岳 何书元

张平文 郑志明

编委会秘书：方新贵

责任编辑：刘 勇

内 容 简 介

本书是高等院校金融数学方向本科生的专业基础课教材。本书着重于提炼和综合金融计算分析中的基本数学模型和方法。

本书由八章组成。第一章介绍利息计算的基本概念和方法；第二章介绍年金现金流模式的计算；第三章介绍一般性投资收益率计算的基本方法；第四、五和六章围绕金融中的一些基本问题介绍相应的计算方法；第七章介绍利率风险分析的基础；第八章对随机情形的金融收益计算问题进行基础性的介绍。本书内容选取贴切实际，叙述清楚，通俗易懂；例题典型、丰富，且与实际相结合，具有一定的实际应用价值。另外，本书力求对常见的和基本的金融计算给出一致的和内在的数学表达，注重训练读者的定量分析和计算能力，并适当地给出这些计算的金融背景。根据教学的需要，本书每章配置了适量的练习题，并在书末附有部分练习题答案与提示，便于教师和学生使用。

本书可作为高等院校应用数学和金融学专业的金融数学、精算学和金融工程方向本科生的相关基础课教材，也可用作金融从业人员在定量金融方法和数理金融方面的培训教材，同时又可作为其他相关人员在数理金融方面的入门读物。本书的内容涵盖了北美精算师协会精算师考试的课程 2 中利息理论部分的内容，也可以作为参加各种精算师考试的参考用书。

作 者 简 介

吴 岚 北京大学数学科学学院金融数学系副教授，博士。研究方向为精算学、金融风险管理的统计方法。1993 年开始精算方向的教学，承担“利息理论与应用”、“风险理论”和“金融统计方法”等课程的课程建设及教学工作。

黄 海 北京大学数学科学学院金融数学系副教授，博士。研究方向为证券投资组合理论、金融风险管理。1999 年开始金融数学方向的教学，承担“利息理论与应用”和“证券投资学”等课程的课程建设及教学工作。

序 言

自 1995 年以来,在美伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合,我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前 言

金融是与货币的发行流通和运用过程相关的所有经济活动。金融学是以上述经济活动为研究对象,以发现其中的一些本质规律为研究目的的一门学科。20 世纪的金融学本身由于金融实践的迅猛发展和不断创新而逐渐成为一门很有生命力的学科。尤其在 20 世纪后期的几十年中它越来越多地表现出与数学的交融:一方面运用适当的数学方法分析和解决金融问题;另一方面,金融中不断涌现的现实问题也向相关的数学和统计学提出了理论上有价值的研究方向。这样的一种现实使得逐渐形成了一个新的交叉领域,并逐渐发展成为一门学科——以金融问题为对象,运用数学和统计学等方法进行定量研究和应用的学科。对这门学科的名称有很多,例如:金融数学、数理金融、数量金融和金融工程等。上述不同的名称只是强调了不同的方面,研究的对象和方法皆是相同的。

正如对金融数学还有多种理解一样,人们对于应该从什么角度进入金融数学也有不同的看法。同样是以金融数学基础(或类似)命名的教科书,其内容可能会差异很大,有些完全介绍数学基础(微积分、线性代数和概率统计基础等),有些则直接介绍金融数学领域比较核心的相对已成熟的若干理论(投资组合理论、资产定价模型和期权定价方法等)。而金融领域的许多计算问题具有共同的数学特征和模型,其中大量的计算和分析(例如:银行的资产负债分析和资本充足分析,一般的融资成本和投资收益分析,金融产品的定价、评估以及保险精算技术等)的实践基础是现金流分析和货币时间价值(累积和贴现)计算。我们认为,现金流分析和货币时间价值计算是所有金融定量分析和计算的基石,是学生建立系统的金融数学研究和应用体系的最根本的基础。

我们以北美精算师协会考试的主要参考书^[1]为主要线条,将该参考书中的前面基础部分压缩为本书篇幅较短的第一章和第二章,

介绍利息的基本计算概念和方法,以及年金计算中的基本工具函数。接着在本书第三章和第四章介绍在金融计算和分析中常用的两大类方法:投资收益率分析和现金流的本金利息分解过程。从实务的角度看,金融学可以分为投资和融资两大部分,其中尤以投资学中的计算问题为多。因此,在第五章我们对主要的金融产品——固定收益产品(债券为主)的计算问题进行了详细的介绍。从这个角度看,本书可作为投资学课程先修课的辅助教材。然后,在第六章介绍了包括抵押贷款分析,固定资产折旧分析等方面的实际应用。最后,我们用两章的篇幅为学生下一步深入的金融数学学习介绍一些准备知识:利率风险分析和随机模型。利率风险的分析和管理是金融领域中很重要的一个主题,已经形成一些规范的工具和算法;随机模型在金融风险分析,特别是衍生工具定价和套期保值技术中已成为基本和必不可少的部分。本教材只是介绍了这方面最基本的工具和方法,希望对读者日后进入这些领域的深入学习有一定的帮助。

本书的编写与出版得到了《北京大学数学学院教学系列丛书》编委会和北京大学出版社的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢。同时,感谢我们的同事杨静平老师和系主任王铎教授,他们在百忙之中审阅了全书稿,并提出了许多宝贵的意见。同时,还要感谢曾经为与本教材有关的课程教学付出辛勤工作的金融数学系研究生:关凌、于善辉、李佳慧、吴芹、王证、张会娜、熊江涛、王耀君和张静等。另外,感谢北京大学出版社的编辑刘勇、曾琬婷两位老师,他们为本书的出版付出了辛勤的劳动,没有他们的支持可能很难最终完成这本教材。

由于我们的专业水平所限,以及对相关资料掌握的程度,本书难免会出现错误和不妥之处,恳请同仁及广大读者不吝指正。

编 者
2005年5月

目 录

第一章 利息基本计算	(1)
§ 1.1 利息基本函数	(1)
1.1.1 累积函数	(2)
1.1.2 单利和复利	(4)
1.1.3 贴现函数	(7)
1.1.4 名利率和名贴现率	(10)
1.1.5 连续利息计算	(12)
§ 1.2 利息基本计算	(14)
1.2.1 时间单位的确定	(15)
1.2.2 价值方程	(16)
1.2.3 等时间法	(18)
1.2.4 利率的计算	(19)
§ 1.3 实例分析	(21)
1.3.1 现实生活中与利率有关的金融现象	(21)
1.3.2 提前支取的处罚	(23)
1.3.3 其他实例	(25)
练习题	(26)
第二章 年金	(30)
§ 2.1 基本年金	(30)
2.1.1 期末年金	(30)
2.1.2 期初年金	(34)
2.1.3 递延年金	(36)
2.1.4 永久年金	(36)
2.1.5 剩余付款期不是标准时间单位的计算	(38)
§ 2.2 广义年金	(40)
2.2.1 付款周期为利息换算周期整数倍的年金	(41)

2.2.2 利息换算周期为付款周期整数倍的年金	(45)
2.2.3 连续年金	(48)
§ 2.3 变化年金	(49)
2.3.1 一般变化年金	(49)
2.3.2 广义变化年金	(55)
2.3.3 连续变化年金	(57)
§ 2.4 实例分析	(58)
2.4.1 固定养老金计划分析	(58)
2.4.2 购房分期付款分析	(60)
2.4.3 年金利率的近似计算	(60)
2.4.4 其他实例	(62)
练习题	(65)
第三章 投资收益分析	(73)
§ 3.1 基本投资分析	(73)
3.1.1 常用的三种基本分析方法和工具	(73)
3.1.2 再投资分析	(79)
§ 3.2 收益率计算	(82)
3.2.1 资本加权法	(83)
3.2.2 时间加权法	(87)
3.2.3 投资额方法和投资年方法	(90)
§ 3.3 资本预算	(93)
3.3.1 收益率方法与净现值方法	(94)
3.3.2 项目回报率与项目融资率	(97)
§ 3.4 实例分析	(99)
3.4.1 投资基金的收益计算	(99)
3.4.2 一般投资的收益计算	(100)
3.4.3 其他实例	(101)
练习题	(103)
第四章 本金利息分离技术	(108)
§ 4.1 摊还法	(108)
4.1.1 未结贷款余额的计算	(109)

4.1.2 摊还表	(111)
§ 4.2 偿债基金法	(116)
4.2.1 偿债基金法的基本计算	(117)
4.2.2 偿债基金方式的收益率分析	(118)
4.2.3 偿债基金表	(119)
§ 4.3 偿债基金法与摊还法的比较	(121)
§ 4.4 其他偿还方式分析	(123)
4.4.1 广义的摊还表和偿债基金表	(123)
4.4.2 金额变化的摊还表和偿债基金表	(126)
4.4.3 连续摊还计算	(129)
§ 4.5 实例分析	(130)
4.5.1 贷款利率依余额变化的还款额计算	(131)
4.5.2 确定本金偿还方式的摊还计算	(133)
4.5.3 其他实例	(133)
练习题	(136)
第五章 固定收益证券	(145)
§ 5.1 固定收益证券的类型和特点	(145)
5.1.1 债券	(146)
5.1.2 优先股票	(148)
§ 5.2 债券基本定价	(149)
5.2.1 债券价格计算公式	(152)
5.2.2 债券价值评估	(155)
5.2.3 两次息票收入之间的账面价值的调整	(163)
§ 5.3 广义债券定价与收益分析	(166)
5.3.1 广义债券价格	(166)
5.3.2 早赎债券	(168)
5.3.3 系列债券	(172)
5.3.4 债券收益率分析	(173)
§ 5.4 实例分析	(176)
5.4.1 优先股票和永久债券	(176)
5.4.2 普通股票	(177)

5.4.3 其他实例	(179)
练习题	(181)
第六章 实际应用	(188)
§ 6.1 抵押贷款分析	(188)
6.1.1 诚实贷款原则	(189)
6.1.2 不动产抵押贷款	(194)
6.1.3 APR 的近似计算	(198)
6.1.4 抵押贷款债务的证券化	(203)
§ 6.2 固定资产折旧分析	(211)
§ 6.3 资本化成本计算	(215)
§ 6.4 实例分析	(218)
6.4.1 其他投资产品和套期保值产品	(218)
6.4.2 衍生金融产品	(219)
6.4.3 其他实例	(223)
练习题	(226)
第七章 利率风险分析	(231)
§ 7.1 利率风险的一般分析	(231)
7.1.1 通货膨胀与利率	(233)
7.1.2 风险与利率	(235)
§ 7.2 利率期限结构	(238)
7.2.1 利率期限结构的定义	(238)
7.2.2 期限结构的理论	(244)
7.2.3 期限结构的模型	(246)
7.2.4 利率风险的度量	(251)
§ 7.3 资产负债管理	(259)
7.3.1 免疫技术	(261)
7.3.2 资产负债匹配	(265)
练习题	(269)
第八章 随机模型	(273)
§ 8.1 随机利率基本模型	(273)

8.1.1 随机利率无期限结构的情形	(274)
8.1.2 独立条件下的随机利率	(275)
8.1.3 不独立的远期利率模型	(279)
8.1.4 离散时间单因子利率模型	(282)
8.1.5 连续时间单因子利率模型	(284)
§ 8.2 资本资产定价模型	(285)
§ 8.3 期权定价模型	(288)
练习题	(293)
附录 复利函数表	(297)
练习题答案与提示	(331)
名词索引	(354)
符号索引	(362)
参考文献	(366)

第一章 利息基本计算

所有金融活动的基础是投资和融资,因此对不同的投、融资方式所带来的收益的定量刻画就构成了金融定量分析的主要内容. 刻画和衡量投资收益的最直观、最基本的概念是利息.

利息的原始定义很多,主要源于从不同的角度看待利息. 从债权债务关系的角度看,利息是借贷关系中债务人为取得资金使用权而支付给债权人的报酬;从简单的借贷关系的角度看,利息是一种补偿,由借款人支付给贷款人,因为前者在一定时间内占有和使用了后者的部分资金;从投资的角度看,利息是一定量的资本经过一段时间的投资后产生的价值增值. 经过一定时间的发展,金融活动中的利息(收益)计算形成了一些规范的、基本的和约定俗成的概念和方法. 本章将介绍这些基础性的概念和方法,包括利息计算的基本函数、计算过程中常见的基本处理方法和工具,还有一些简单的现实计算实例.

§ 1.1 利息基本函数

在一般的金融活动中,常见的模式是:某一方投资一定量的货币(称**原始投资**或**本金**)于某个业务,在没有新资本投入和抽取原始本金的假定下,原始投资经过一段时间的运作将有所变化,达到一个新的价值. 如何从根本上描述这种变化过程呢? 这里有两个基本要素:原始投资和投资经过的时间. 因此,这个变化过程应该表示为这两个要素的函数.

定义 1.1 设用 $A(t)$ 表示原始投资 $A(0)$ 经过时间 $t(t > 0)$ (事先给定时间度量单位)后的价值,则当 t 变动时称 $A(t)$ 为**总量函数**.

定义 1.2 总量函数 $A(t)$ 在时间 $[t_1, t_2]$ 内的变化量(增量)称为**期初货币量** $A(t_1)$ 在时间 $[t_1, t_2]$ 内的**利息**,记为 I_{t_1, t_2} ,即

$$I_{t_1, t_2} = A(t_2) - A(t_1). \quad (1.1.1)$$

特别地,当 $t_1=n-1$, $t_2=n$ ($n \in \mathbf{N}$) 时,记

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad (n \in \mathbf{N}), \quad (1.1.2)$$

并称 I_n 为第 n 个时间段内的利息.

注 利息总是在期末实现的.

1.1.1 累积函数

现实生活中,虽然实际投资的原始货币量千差万别,但是价值变化过程是带有根本性的,其规律往往与本金投入的大小没有直接的关系.为了更好地揭示这种变化规律,考虑如下的定义.

定义 1.3 设 1 个货币单位的本金在 t ($t > 0$) 时刻的价值为 $a(t)$,则当 t 变动时,称 $a(t)$ 为**累积函数**.

定义 1.3 表明,货币的时间价值可以用一个累积函数来表示.一般情况下,累积函数 $a(t)$ 具有以下的基本性质:

(1) $a(0) = 1$;

(2) $a(t)$ 为递增函数(如果该函数出现下降的趋势则说明将产生负的利息.这一点在数学上并没有什么问题,但在大多数金融问题中它是没有意义的,只有在投资本金不能收回的情形才会出现负的利息.累积函数为常数表示无利息情形,这种现象有时会发生).

常见的累积函数 $a(t)$ 有如下几类:(1) 常数函数 $a(t) \equiv 1$ (图 1.1 中的系列 1); (2) 一般的线性函数(图 1.1 中的系列 2); (3) 二次函数(图 1.1 中的系列 3); (4) 指数函数(图 1.1 中的系列 4).从这四类函数本身的性质可以发现,四种累积函数的累积上升方式是不同的,它们分别代表了不同的货币价值累积方式.

为了表示货币价值的相对变化幅度,度量利息的常用方法是计算所谓的利率.利率是指一定的货币量在一段时间(计息期)内的变化量(利息)与期初货币量的比值.为了便于理论的推导,下面给出用数学语言描述的利率的定义.

定义 1.4 给定时间区间 $[t_1, t_2]$ 内总量函数 $A(t)$ 的变化量(增量)与期初货币量的比值称为在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内的**利率**,记为 i_{t_1, t_2} ,即

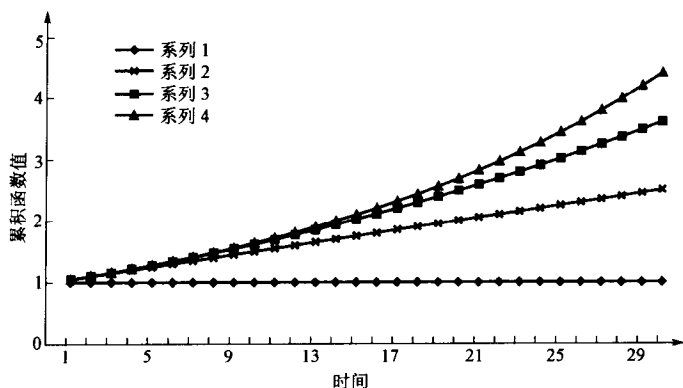


图 1-1 几类特殊累积函数的特征

$$i_{t_1, t_2} = \frac{A(t_2) - A(t_1)}{A(t_1)} = \frac{I_{t_1, t_2}}{A(t_1)}. \quad (1.1.3)$$

特别地, 当 $t_1 = n-1$, $t_2 = n$ ($n \in \mathbf{N}$) 时, 记

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)} \quad (n \in \mathbf{N}), \quad (1.1.4)$$

且此时有

$$A(n) = A(n-1)(1 + i_n).$$

通常称 i_n 为第 n 个时段的利率。

如果计息期为标准的时间单位(如: 月、季、半年或年等), 则所得利率常常称为**实利率**. 除特别说明外, 以下实利率一般皆指年利率。

注 (1) 利率表示在一定的时间内的实际利息收入的相对量。

(2) 利率通常用百分数表示。

(3) 利率的定义要求在计息期内没有其他资本的投入也没有原始本金的撤出, 即计息期内本金保持不变。

(4) 利息是在计息期期满时支付的。

由利率的定义可得到如下结论 1.1.

结论 1.1 某个计息期 $[t_1, t_2]$ 内的利率为单位本金在该计息期内产生的利息与期初资本量的比值, 即

$$i_{t_1, t_2} = \frac{a(t_2) - a(t_1)}{a(t_1)}. \quad (1.1.5)$$