

# 力学 习题与解答

舒幼生 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

# 力学学习题与解答

舒幼生 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

力学习题与解答/舒幼生编著. —北京:北京大学出版社,2005.9

ISBN 7-301-09402-7

I. 力… II. 舒… III. 力学—高等学校—解题 IV. 03-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 083885 号

**书 名:** 力学习题与解答

著作责任者: 舒幼生 编著

责任编辑: 瞿 定

标准书号: ISBN 7-301-09402-7/O · 0659

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

排 版 者: 北京高新特打字服务社 82350640

印 刷 者: 北京飞达印刷有限责任公司

经 销 者: 新华书店

890 毫米×1240 毫米 A5 11.5 印张 330 千字

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 18.00 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

## 序(原书前言)

本书将原教材《力学(物理类)》中各章习题逐题解答,汇集成册,可与教材配套使用,也可以单独使用,作为配合其他力学教材的辅导书。

为了让使用本书的读者对力学课程更深刻理解,并了解习题编制时作者的意图,特将教材的前言作为本书的序言复录于下。

本书(《力学(物理类)》)系为理科大学物理类专业学生编写的普通物理力学教材,主体内容是经典力学,其后,用适量的篇幅介绍了狭义相对论中的运动学和质点动力学。

力学是为大学一年级学生设置的专业基础课,基本内容在高中物理课上虽已讲授过,但较为粗浅。再则,多数学生受高考影响,偏重解题得分,对经典力学普遍缺乏较为系统的认识。考虑到这一欠缺对后续理论课程的学习将会十分不利,因此,在力学课程中拟强调教学内容的融会贯通,在教材主体结构方面采用传统的方式以展现经典力学内在的系统性。

经典力学主体结构的基础是实验定律,从现象观测直至定律成文,其间的过程始终是未完成的归纳。未完成性为后来的物理学家提供了进一步探索的可能,使得经典力学能经爱因斯坦的工作,修正、发展成为狭义相对论力学。归纳和演绎是必要的。定律之后,运用数理逻辑导出一系列定理、公式,乃至形成相当完整的理论体系,其后效应不仅仅在于社会应用,更在于深化了人类对自然界的认识。

经典力学包含两组定律,其一为牛顿三定律,其二为力的结构性定律。牛顿三定律是核心内容,具有普适性,由此演绎出动量、能量、角动量三组定理。力的结构性定律涉及物体(或物质)间具体的相互作用规律,其中包括牛顿万有引力定律、胡克弹性力定律、摩擦力定律、库仑定律等。两组定律结合展开成的经典力学体系,可以统一地

解释宏观世界和部分宇观世界中出现的种种力学现象。

梳理经典力学系统,逻辑上的简洁性引起的美感,当能激起学生对牛顿和前辈学者的崇敬之心。

当前正在进行的中学物理教学改革,删去了部分经典的定量内容,增添了部分近代的定性半定量的内容,旨在减轻应试负担,提高中学生的综合素质。改革的长远效果将会显现,但就近期而言,却难免会影响大一新生的物理基础。面对现实,力学课程既然不宜降低教学标准,就更需考虑如何化解学生听课的困难。为此,本教材在基础内容陈述方式上,力求兼顾多数学生的可接受性。例如将质心、刚体合并在同一章内,从刚体平动问题遇到的动力学困难引入质心,使学生感觉自然。又如狭义相对论一章中安排了一段内容,从逻辑上定性叙述了如何由光速不变原理导出惯性系之间时钟零点校准的差异,又由这一差异导出运动直尺长度的收缩,继而由长度收缩导出运动时钟计时率的变慢。帮助学生理清光速不变原理与时间度量相对性之间的因果关联,意在化难为易。

从教多年,深感较好的题目不仅可以起到训练学生运用理论知识解决具体问题的能力,而且也能提升学生对物理学科的兴趣。本人在教材编写过程中刻意为学生编制和选录了各章习题,按易、难程度分成 A、B 两组,附于各章后,并将全部题解汇集成册,与教材配套出版,供学生解题后参考。

舒幼生

2005年8月于北京

# 目 录

1	质点运动学	(1)
	A 组	(1)
	B 组	(19)
2	牛顿定律 动量定理	(34)
	A 组	(34)
	B 组	(48)
3	机械能定理	(66)
	A 组	(66)
	B 组	(89)
4	角动量定理 天体运动	(107)
	A 组	(107)
	B 组	(124)
5	质心 刚体	(144)
	A 组	(144)
	B 组	(168)
6	流体	(205)
	A 组	(205)
	B 组	(217)
7	振动和波	(223)
	A 组	(223)

---

B 组 .....	(252)
<b>8 狭义相对论</b> .....	(282)
A 组 .....	(282)
B 组 .....	(302)
<b>附录 数学补充知识</b> .....	(342)
A 组 .....	(342)
B 组 .....	(350)

# 1 质点运动学

## A 组

1-1 精密测定重力加速度  $g$  的一种方法是在真空容器中竖直向上抛出一个小球,测出小球抛出后两次经过某竖直位置  $A$  的时间间隔  $T_A$  和两次经过另一竖直位置  $B$  的时间间隔  $T_B$ . 若已知  $B$  在  $A$  的上方  $h$  处,试求重力加速度  $g$ .

**解** 方法一 以起抛点为坐标原点建立竖直向上的  $y$  坐标,如图 1-1 所示. 将起抛时刻记为  $t=0$ ,初速记为  $v_0$ ,两次经过同一  $y$  点的时刻分别记为  $t_1$  和  $t_2$ ,则有

$$v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = y = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

相继可得

$$v_0(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} g(t_2^2 - t_1^2), \quad t_2 + t_1 = 2v_0/g.$$

又可得

$$\begin{aligned} 2y &= v_0(t_2 + t_1) - \frac{1}{2} g(t_2^2 + t_1^2) \\ &= \frac{1}{2} g(t_2 + t_1)^2 - \frac{1}{2} g(t_2^2 + t_1^2) = g t_2 t_1. \end{aligned}$$

设  $t_2 - t_1 = T$ , 则有

$$T^2 = (t_2 - t_1)^2 = (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y,$$

于是对  $A, B$  分别有

$$T_A^2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y_A, \quad T_B^2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y_B.$$

因  $y_B - y_A = h$ , 可得

$$T_A^2 - T_B^2 = \frac{8}{g} (y_B - y_A) = \frac{8}{g} h,$$



图 1-1



即 
$$g = 8h/(T_A^2 - T_B^2).$$

方法二 小球可达的最高点记作  $P$ ,  $A$  在  $P$  下方  $h_A$  处, 小球从  $P$  静止开始下落到  $A$  经时  $T_A/2$ , 有

$$h_A = \frac{1}{2}g(T_A/2)^2 = \frac{1}{8}gT_A^2.$$

$B$  在  $P$  下方  $h_B$  处, 小球从  $P$  到  $B$  经时  $T_B/2$ , 有

$$h_B = \frac{1}{2}g(T_B/2)^2 = \frac{1}{8}gT_B^2.$$

继而有

$$h = h_A - h_B = \frac{1}{8}g(T_A^2 - T_B^2), \quad \text{即} \quad g = 8h/(T_A^2 - T_B^2).$$

1-2 在地面上方同一位置分别以  $v_1, v_2$  为初速度, 先后向上抛出两个小球, 第 2 个小球抛出后经过  $\tau$  时间与第 1 个小球相遇. 改变两球抛出的时间间隔, 便可改变  $\tau$  值. 设  $v_A, v_B$  已选定, 且  $v_1 < v_2$ , 试求  $\tau$  的最大值.

解 不难判定, 两球只能在抛出点上方, 且在球 2 上升过程中相遇.  $v_1, v_2$  已确定, 为使  $\tau$  达最大, 要求在球 1 升至最大高度  $h_1$  处相遇, 有

$$h_1 = v_1^2/2g.$$

球 2 抛出后经  $\tau$  时间达  $h_1$  高度, 有

$$h_1 = v_2\tau - \frac{1}{2}g\tau^2,$$

可解得 
$$\tau = (v_2 \mp \sqrt{v_2^2 - v_1^2})/g.$$

括号中取“+”对应  $\tau > v_2/g$ , 意味着球 2 在其下落过程中与球 1 相遇, 这是不可能的, 应舍去. 最后, 得  $\tau$  的最大值为

$$\tau = (v_2 - \sqrt{v_2^2 - v_1^2})/g.$$

1-3 图 1-2 所示一系列光滑斜面的顶端与底端间的水平距离同为  $l$ , 倾角  $\phi$  在  $0 \sim 90^\circ$  间连续取值, 让小球从斜面顶端自静止下滑到底端, 所经时间记为  $T(\phi)$ .

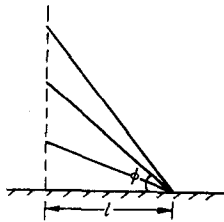


图 1-2

(1) 试求  $T(\phi)$  的最小值  $T_{\min}$ .

(2) 取  $\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , 分别画出小球沿斜面运动速度  $v$  随时间  $t$  的变化曲线, 并计算各自平均值  $\bar{v}$ .

解 (1) 小球沿倾角  $\phi$  斜面运动加速度为

$$a = g \sin \phi,$$

其水平分量为

$$a_{//} = (g \sin \phi) \cos \phi = \frac{1}{2} g \sin 2\phi.$$

经水平路程  $l$  所需时间即为  $T(\phi)$ , 即有

$$T(\phi) = \sqrt{2l/a_{//}} = \sqrt{4l/g \sin 2\phi},$$

$$T_{\min} = T(\phi)|_{\phi=45^\circ} = 2\sqrt{l/g}.$$

(2) 小球沿  $\phi$  斜面运动速度为  $v = (g \sin \phi)t$ , 结合  $T(\phi)$  算式, 得

$$\phi = 30^\circ: T(\phi) = 1.07T_{\min},$$

$$t = 0 \text{ 时, } v = 0; t = T(\phi) \text{ 时, } v = 1.07\sqrt{gl}.$$

$$\phi = 45^\circ: T(\phi) = T_{\min} = 2\sqrt{l/g},$$

$$t = 0 \text{ 时, } v = 0; t = T(\phi) \text{ 时, } v = 1.41\sqrt{gl}.$$

$$\phi = 60^\circ: T(\phi) = 1.07T_{\min},$$

$$t = 0 \text{ 时, } v = 0; t = T(\phi) \text{ 时, } v = 1.86\sqrt{gl}.$$

相应的  $v-t$  曲线如图 1-3 所示.

初速为零的匀加速直线运动平均速度等于末速度的二分之一, 即有

$$\phi = 30^\circ: \bar{v} = 0.54\sqrt{gl},$$

$$\phi = 45^\circ: \bar{v} = 0.71\sqrt{gl},$$

$$\phi = 60^\circ: \bar{v} = 0.93\sqrt{gl}.$$

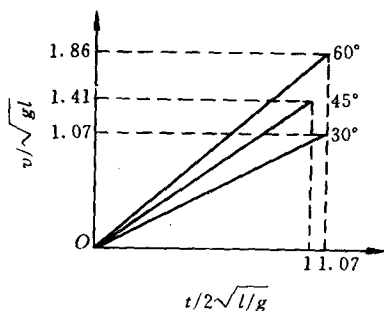


图 1-3

1-4 飞机着陆后为尽快停下, 采用尾部“降落伞”制动.  $t = 0$

刚着陆时的速度大小记为  $v_0$ , 坐标取成  $x = 0$ . 假设滑行过程中加速度为  $a_x = -\beta v_x^2$ , 其中  $\beta$  是正的常量, 试求速度  $v_x$  随位置  $x$  的变化关

系,再求  $v_x$  随时间  $t$  的变化关系.

解 由

$$-\beta v_x^2 = a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x, \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\beta dx,$$

积分 
$$\int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^x \beta dx, \quad v_x = v_0 e^{-\beta x}.$$

再由 
$$-\beta v_x^2 = a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \frac{dv_x}{v_x^2} = -\beta dt,$$

积分 
$$\int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x^2} = -\int_0^t \beta dt, \quad v_x = v_0 / (1 + \beta v_0 t).$$

1-5 在  $x$  轴上运动的某质点,加速度与位置的关系为  $a_x = -\omega^2 x$ , 其中  $\omega$  是正的常量. 已知  $t=0$  时,质点位于  $x_0 > 0$  处,速度  $v_0 \neq 0$ , 试求质点位置  $x$  随时间  $t$  的变化关系.

解 由

$$-\omega^2 x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x, \quad v_x dv_x = -\omega^2 x dx,$$

积分

$$\int_{v_0}^{v_x} v_x dv_x = -\int_{x_0}^x \omega^2 x dx,$$

得 
$$\frac{dx}{dt} = v_x = \pm \omega \sqrt{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right) - x^2}.$$

积分 
$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm \int_0^t \omega dt, \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

得 
$$\arcsin \frac{x}{A} - \arcsin \frac{x_0}{A} = \pm \omega t.$$

引入  $\phi_0 = \arcsin \frac{x_0}{A} > 0$  ( $\phi_0$  在第 I 象限取值),

便有 
$$x = A \sin(\omega t + \phi_0), \quad (1)$$

或 
$$x = A \sin(-\omega t + \phi_0) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right). \quad (2)$$

对①式,有

$$\begin{aligned}x &= A \sin(\omega t + \phi_0), & v_x &= \omega A \cos(\omega t + \phi_0), \\x_0 &= A \sin \phi_0 > 0, & v_0 &= \omega A \sin \phi_0 > 0.\end{aligned}$$

对②式,有

$$\begin{aligned}x &= A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right), \\v_x &= -\omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right), \\x_0 &= A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = A \sin \phi_0 > 0, \\v_0 &= -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = -\omega A \cos \phi_0 < 0.\end{aligned}$$

因  $\phi_0 > 0$ , 不会出现  $v_0 = 0$  的情况. 最后, 可得解为

$$x = \begin{cases} A \sin(\omega t + \phi_0), & v_0 > 0, \\ A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right), & v_0 < 0, \end{cases}$$

都是简谐振动.

1-6 小球从同一位置以相同的初速率  $v_0$ , 在同一竖直平面上朝着不同方向斜抛出去, 如果抛射角  $\theta$  可在  $0 \sim \pi$  范围内连续变化, 试问各轨道最高点连成的曲线是什么类型曲线?

解 在此竖直平面内以抛射点为原点  $O$ , 建立水平  $x$  轴和竖直向上的  $y$  轴.  $\theta$  角对应的水平射程和射高分别是

$$s = v_0^2 \sin 2\theta / g, \quad H = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g.$$

轨道最高点的  $x, y$  坐标量分别为

$$x = s/2 = v_0^2 \sin 2\theta / 2g, \quad y = H = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g,$$

上两式联立, 消去参量  $\theta$  的过程如下:

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{v_0^4}{g^2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) = \frac{v_0^4}{g^2} \frac{2gy}{v_0^2} \left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right) \\&= -4y^2 + \frac{2v_0^2}{g}y = -4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 + \frac{v_0^4}{4g^2},\end{aligned}$$

便得各轨道最高点连成的曲线的方程为

$$\frac{x^2}{v_0^4/4g^2} + \frac{(y - v_0^2/4g)^2}{v_0^4/16g^2} = 1.$$

这是椭圆曲线,其半长轴、半短轴和中心分别为

$$a = v_0^2/2g, \quad b = v_0^2/4g, \quad (0, v_0^2/4g).$$

椭圆上端点对应  $\theta = \frac{\pi}{2}$  轨道的最高点,下端点对应  $\theta = 0$  或  $\pi$  轨道的最高点,右和左两端点分别对应  $\theta = \frac{\pi}{4}$  和  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  轨道的最高点.

1-7 一位足球运动员踢出的球具有初速率 25 m/s,今在球门正前方 50 m 处欲将球踢进球门.为防止守门员将球挡住,他选择进球位置在正前方球门水平横梁下方 50 cm 之内区域.已知横梁高为 2.44 m,试问他应在什么倾角范围将球踢出?

**解** 足球的轨道方程为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x.$$

入射点坐标

$$x = 50 \text{ m}, \quad 1.94 \text{ m} < y < 2.44 \text{ m}.$$

再以  $v_0 = 25 \text{ m/s}$  代入,踢球倾角(即球的抛射角)  $\theta$  取值范围应满足不等式:

$$1.94 < 50 \tan \theta - 19.6(1 + \tan^2 \theta) < 2.44,$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} \tan^2 \theta - 2.55 \tan \theta + 1.10 < 0, \\ \tan^2 \theta - 2.55 \tan \theta + 1.12 > 0, \end{cases}$$

$$\text{故 } \theta \text{ 需同时满足} \quad \begin{cases} 28.8^\circ < \theta < 63.4^\circ, \\ \theta < 29.6^\circ \text{ 或 } \theta > 63.2^\circ, \end{cases}$$

故  $\theta$  可取范围是

$$28.8^\circ < \theta < 29.6^\circ \quad \text{或} \quad 63.2^\circ < \theta < 63.4^\circ.$$

1-8 一地面雷达观察者正从屏幕上监视由远处投来的一抛射体.某时刻,他得到的信息显示:抛射体达到了最高点且具有水平速度  $v$ ;  $v$  的方向线与观察者、抛射体位于同一竖直平面;抛射体与观察者之间的距离为  $l$ ;观察者到抛射体连线与水平面的夹角为  $\theta$ .

- (1) 预测抛射体落地点与观察者间的水平距离  $d$ ;
- (2) 预测抛射体能否越过观察者的头顶?

**解** 本题涉及内容可处理为在离地

$$h = l \sin \theta$$

高处,以水平速度  $v$  出射的平抛运动问题. 落地时间

$$t = \sqrt{2h/g},$$

水平抛射点与落地点水平距离为

$$s = vt.$$

(1) 由上述三式,可得

$$s = v \sqrt{2l \sin \theta / g},$$

$$d = |s - l \cos \theta| = |v \sqrt{2l \sin \theta / g} - l \cos \theta|.$$

(2) 仅当

$$v \sqrt{2l \sin \theta / g} > l \cos \theta, \quad \text{即} \quad v > \sqrt{gl/2 \sin \theta \cos \theta}$$

时,抛射体方会越过观察者头顶.

1-9 离地高  $h$  的大厅吊灯爆炸成碎片,朝各个方向射出,初速度同为  $v_0$ . 设吊灯离屋顶和墙较远,碎片不会与之相撞;再设地面铺有毛毯,碎片落地后不会反弹. 试将每一碎片运动斜交地分解成沿其初速  $v_0$  方向的匀速直线运动和静止开始的竖直向下自由落体运动,以此求解地面上碎片分布区域的半径  $R$ .

解 某碎片于  $t=0$  时刻于  $O$  点以初速  $v_0$  抛出,设置沿  $v_0$  方向的  $x$  轴和竖直向下的  $y$  轴,  $t$  时刻碎片落于地面  $P$  处,如图 1-4 所示.  $P$  到灯柱距离记为  $r$ , 则应有

$$\begin{aligned} r^2 &= (v_0 t)^2 - \left( \frac{1}{2} g t^2 - h \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} g^2 t^4 + (v_0^2 + gh)t^2 - h^2. \end{aligned}$$

不同的碎片有不同的  $v_0$ , 对应不同的落地时间  $t$ , 落地点  $P$  有不同的  $r$  值, 所求  $R$  即为这些  $r$  中的极大值. 因  $r^2$  是  $t^2$  的二次函数, 当

$$t^2 = \frac{2}{g^2} (v_0^2 + gh)$$

时,  $r^2$  取得极大, 对应  $r$  取得极大值, 即有

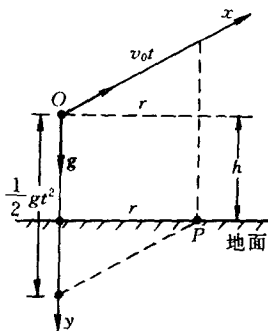


图 1-4

$$R = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

1-10 质点在  $xy$  平面上运动,  $t=0$  时刻, 位于  $x_0=A, y_0=0$ , 速度的两个分量各是  $v_{x0}=0, v_{y0}=B\omega$ , 任意  $t$  时刻加速度的两个分量各是  $a_x=-A\omega^2 \cos \omega t, a_y=-B\omega^2 \sin \omega t$ , 其中  $A, B, \omega$  都是常量, 试求质点运动轨道.

解 由

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt = -A\omega^2 \int_0^t \cos \omega t dt,$$

得 
$$v_x = -A\omega \sin \omega t.$$

再由 
$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt = -A\omega \int_0^t \sin \omega t dt,$$

得 
$$x = A \cos \omega t.$$

类似地积分, 可得

$$y = B \sin \omega t.$$

两式联立, 消去参量  $t$ , 即得轨道方程:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

是一个椭圆.

1-11 查找有关数据, 估算下述各量的大小:

- (1) 氢原子中电子绕核圆运动的加速度值(绝对值);
- (2) 学生匀速骑自行车直线行进时, 车轮边缘点的加速度值;
- (3) 以太阳为参考物, 地面上的实验室因地球自转和公转而具有的最大可能的加速度值.

解 (1) 正常情况下, 电子绕核圆运动半径取为玻尔半径, 向心加速度由库仑力提供, 查找有关数据后, 可估算得

$$a \approx 10^{23} \text{ m/s}^2.$$

(2) 正常情况下, 自行车车轮沿地面纯滚, 匀速行进时, 轮心相对地面加速度为零, 车轮边缘点相对地面加速度即为相对轮心的匀速圆运动向心加速度. 估测车轮半径和自行车平均速度后, 可估算得

$$a \approx 10^2 \text{ m/s}^2.$$

(3) 实验室随地球自转有一向心加速度  $a_1$ , 其值  $a_1$  与地球自转角速度、地球半径及所在纬度  $\phi$  有关. 实验室随地球中心绕太阳公转, 又有对应的圆运动向心加速度  $a_2$ , 其值  $a_2$  由公转角速度和日心到地心的间距确定.  $a_1, a_2$  合成得  $a$ .  $a$  的最大可能值即为  $a_{1\max} + a_2$ , 其中  $a_{1\max}$  对应  $\phi=0$  的  $a_1$  值. 结合生活知识, 查找有关数据, 可估算得

$$a \approx 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

1-12 半径同为  $R$  的两个几何球面开始时互相重合, 今使其中一个球面固定, 另一个球面从  $t=0$  开始匀速平动, 速度大小为  $v_0$ .

(1) 试求两球面刚好完全分离的时刻  $t_c$ ;

(2) 试求  $0 < t < t_c$  时刻, 两球面交线长度收缩率(单位时间内长度缩短量)  $\gamma$ ;

(3) 试求  $0 < t < t_c$  时刻, 两球面交点在第一球面大圆上作圆运动的向心加速度  $a_c$  和切向加速度  $a_{\theta}$ .

解 (1) 第二球面从  $t=0$  到  $t=t_c$  时间, 经过  $2R$  路程与第一球面分离, 即得

$$t_c = 2R/v_0.$$

(2) 两球面交线中任取一点  $P$ , 在  $P$  与两个球心  $O_1, O_2$  确定的平面上设置  $O_1xy$  坐标系如图 1-5 所示.  $O_1, O_2$  各自相对  $P$  点的  $x$  方向分离速度大小相同, 它们都应等于  $O_2$  相对  $O_1$  运动速度大小的二分之一, 故  $P_1$  相对  $O_1$  沿  $x$  方向速度是

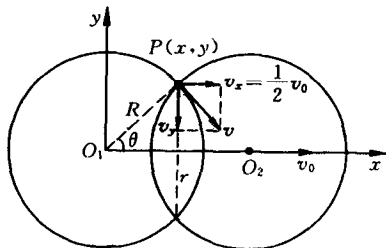


图 1-5

$$v_x = \frac{1}{2}v_0,$$

$y$  方向速度大小为

$$|v_y| = v_x \cot \theta = v_x \frac{x}{y} = v_x \frac{v_x t}{\sqrt{R^2 - v_x^2 t^2}} = \frac{v_0^2 t}{2\sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}}.$$

两球面相交的圆线半径记为  $r$ , 则有



$$dr/dt = |v_y|,$$

交线长度收缩率便是

$$\gamma = d(2\pi r)/dt = 2\pi dr/dt = \pi v_0^2 t / \sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}.$$

(3)  $t$  时刻  $P$  点速度大小为

$$v = v_x / \sin \theta = Rv_y / y = Rv_x / \sqrt{R^2 - v_x^2 t^2} = Rv_0 / \sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2},$$

向心加速度和切向加速度分别是

$$a_{\text{心}}: \begin{cases} \text{指向 } O_1, \\ a_{\text{心}} = v^2/R = Rv_0^2/(4R^2 - v_0^2 t^2). \end{cases}$$

$$a_{\text{切}}: \begin{cases} \text{与 } v \text{ 同向}, \\ a_{\text{切}} = dv/dt = Rv_0^3 t / (4R^2 - v_0^2 t^2)^{3/2}. \end{cases}$$

此处  $a_{\text{切}}$  并非  $a_{\text{切}}$  的绝对值, 而是  $a_{\text{切}}$  沿切向的投影式, 带有正、负号. 本题  $a_{\text{切}}$  取正, 表明  $a_{\text{切}}$  与  $v$  方向一致.

1-13 四质点  $A, B, C, D$  在同一平面上运动. 每一时刻,  $A$  速度总对准  $B$ , 速度大小为常量  $u$ ;  $B$  速度总对准  $C$ , 速度大小同为  $u$ ;  $C$  速度总对准  $D$ , 速度大小同为  $u$ ;  $D$  速度总对准  $A$ , 速度大小同为  $u$ . 某时刻,  $A, B, C, D$  恰好逆时针方向按序位于各边长为  $l$  的正方形四个顶点上, 试求此时  $A$  的加速度  $a$  和  $A$  的运动轨道在此位置的曲率半径  $\rho$ .

解 经  $dt$  时间,  $A, B, C, D$  位置变化如图 1-6 所示.  $A$  的速度变化是

$$du: \begin{cases} \text{方向: 与 } u(t) \text{ 垂直, 即法向}, \\ \text{大小: } du = u d\phi. \end{cases}$$

几何关系方面有

$$u dt = (l - u dt) \tan(d\phi) = l d\phi,$$

$A$  的加速度为

$$a = \frac{du}{dt}: \begin{cases} \text{方向: 与 } u(t) \text{ 垂直, 即法向}, \\ \text{大小: } a = du/dt = u^2/l. \end{cases}$$

$a$  无切向分量, 与  $A$  作匀速曲线运动无切向加速度一致. 由  $a$  的法向性, 据

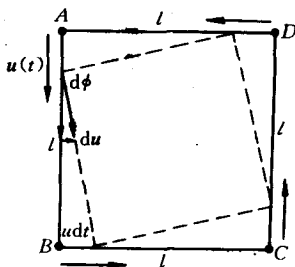


图 1-6