ZhXShX

中学数学丛书

张硕才 龚延华

不等式

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZhXShX

中学数学丛书

不等式

张硕才　龚延华

湖北教育出版社

内 容 提 要

本书介绍了不等式的基本性质、解法、证明及应用。有关内容在中学通用教材的基础上作了拓广、加深和提高.

本书叙述简明，通俗易懂，适合中学生自学，同时，亦可供中学数学教师教学时参考.

中学数学丛书
不 等 式
张硕才 龚延华
*
湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行
天门县印刷厂印刷
787×1092 毫米 32 开本 6.875 印张 1 插页 155,000
1983 年 9 月第 1 版 1983 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—20,500
统一书号：7306·34 定价：0.60 元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版.

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概

念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套从书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

第一章　不等式的基本性质

在日常生活、生产活动和科学研究工作中，经常会遇到要比较两个量(或好几个量)的大小、多少、高低、轻重、长短、远近、快慢、……等等．这些实际量比较的结果，反映在数量关系上，就得到等式或不等式．

本书中主要研究不等式的解法和不等式的证明及它们的应用．

§1. 不等式的基本概念

在全国统编初中数学课本《代数》第一册中，把不等式定义为：表示不等关系的式子，叫做不等式．

不等号“＞”、“＜”、“≥”和“≤”中的每一个都是表示一种不等关系．分别读做“大于”、“小于”、“大于等于”、“小于等于”．不等号“≥”和“≤”，也可读做“不小于”和“不大于”．

根据不等式对于其中字母能使其成立的取值范围，分为绝对不等式、条件不等式和矛盾不等式三种：

若不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能成立，这样的不等式叫做绝对不等式．例如：不等式 $x^2+1>0$，就是绝对不等式；

若只能用某限定范围内的数值代替不等式中的字母，它才能成立，这样的不等式叫做条件不等式．例如：不等式 $x+2<3$ 就是条件不等式；

若不论用什么数值代替不等式中的字母，它都不成立，这样的不等式叫做矛盾不等式．例如：不等式 $x+2>x+3$ 就是矛盾不等式．

在学习了函数之后，不等式可以从函数角度给出如下的定义：

用不等号连结两个函数所得到的式子，叫做不等式，即形如 $f(x)\vee g(x)$ 的式子叫做不等式．（这里 $\vee$ 表示不等号“$>$”、“$<$”、“$\geqslant$”和“$\leqslant$”中的某一个．）

不等式还可以根据它所含的函数的类型来加以分类．例如，若不等式 $f(x)\vee g(x)$ 中含有的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是整式，这样的不等式就叫做整式不等式；若不等式中含有的函数至少有一个是分式函数，其他函数是整式函数，则这个不等式就叫做分式不等式；若不等式中含有无理函数式，其他函数是有理函数式，则它叫做无理不等式；若不等式中含有三角函数则它叫做三角不等式；若不等式中含有指数函数（或对数函数），则它叫做指数不等式（或对数不等式）；若不等式中含有反三角函数，则它叫做反三角不等式；……等等．

对于整式不等式，还可以根据未知数的个数和未知数的次数来分类．例如：若整式不等式中只含有一个未知数且未知数的最高次数为一次的整式不等式叫做一元一次不等式；含有一个未知数且未知数的最高次数为二次的整式不等式叫做一元二次不等式；……含有一个未知数且未知数的最高次数为 n 次的整式不等式叫做一元 n 次不等式；含有两个未知数且未知数的最高次数为一次的整式不等式叫做二元一次不等式；……含有 m 个未知数且未知数的最高次数为 n 次的整式不等式叫做 m 元 n 次不等式．

例如：$x^2+y^2\geqslant 2xy$ 叫整式不等式，它是二元二次不等

式；$3x^5-4x^3+x^2+2>0$ 是一元五次不等式；$\frac{x^2-5x+1}{x+2}<0$ 是分式不等式；$\sqrt{x+3}<x+2$ 是无理不等式；$\lg(x+2)>\lg x+3$ 是对数不等式；$\sin 3x>2\sin x$ 是三角不等式；……等等.

能使含有未知数的不等式成立的未知数的值就叫做这个不等式的解；求不等式的所有解或证明该不等式无解的过程叫做解不等式．用集合的观点来说：我们把某个不等式的解的全体组成的集合叫做这个不等式的解集.

中学数学中不等式这一部份，主要研究两个问题，即条件不等式的求解和绝对不等式的证明．其中包括这样一类问题：在未知数满足一定条件下，证明某个不等式成立．例如：

已知：$x_1x_2\cdots x_n=1$，且 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 都是正数，求证：$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 2^n$.

这类问题叫做条件不等式的证明.

§2. 不等式论证的基础

必须强调指出：不等式中不等号两边的式子，是能够比较大小的，否则不等式将没有意义．读者在学习复数时知道：复数是不能比较大小的．因此，只有在实数集或它的子集里，才能研究不等式，在复数集里，不等式就没有意义了．这是因为实数集具有顺序性，即能够比较任意两个实数的大小．在研究不等式时所提到的数，一般都是实数，本书中所提到的数，若没有特别声明，所指的就是实数.

在研究不等式的性质、解不等式和证明不等式时，经常要用到实数的一些基本性质，这些实数的基本性质，是不等式论

证的基础．为了下面论证的方便，我们把它们归纳为下面六条公理．

公理 1 正数大于零，也大于一切负数；负数小于零，也小于一切正数．即

a 是正数 $\Longleftrightarrow a>0$；

b 是负数 $\Longleftrightarrow b<0$；

$$\left\{\begin{array}{l} a>0 \\ b<0 \end{array}\right. \Longrightarrow a>b \text{ 或 } b<a.$$

公理 2 正数中，绝对值较大的数其数值较大；负数中，绝对值较大的数其数值较小．

即 $a>0$，$b>0$ 且 $|a|>|b| \Longrightarrow a>b$；

$a<0$，$b<0$ 且 $|a|>|b| \Longrightarrow a<b$.

公理 3 正数的相反数是负数；负数的相反数是正数．即

$a>0 \Longleftrightarrow -a<0$；

$a<0 \Longleftrightarrow -a>0$.

公理 4 两数之差大于零，则被减数大于减数；两数之差等于零，则两数相等；两数之差小于零，则被减数小于减数．其逆命题也是正确的．即

$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$；

$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b$；

$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b$.

公理 5 两个正数的和仍是正数；两个负数之和仍是负数．即

$a>0$ 且 $b>0 \Longrightarrow a+b>0$；

$a<0$ 且 $b<0 \Longrightarrow a+b<0$.

公理 6 同号两数相乘，其积为正数；异号两数相乘，其积为负数．其逆命题也是正确的．即

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \Longleftrightarrow a \cdot b>0;$$

$$\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases} \Longleftrightarrow a \cdot b<0.$$

以上六条公理形式叙述的实数的基本性质，是读者在初中一年级学习有理数时就很熟悉的有理数的基本性质在实数范围内的推广.我们把这六条基本性质作为我们研究不等式的性质、解不等式和证明不等式的理论依据,即作为不等式论证的基础.

§3. 不等式的基本性质

不等式的基本性质可归纳为下面的十二条定理.

定理 1 若 $a>b$，则 $b<a$；反过来，若 $b<a$，则 $a>b$.

证明：因 $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$（公理四）

$\Longleftrightarrow a-b$ 是正数，（公理 1）

又因 $a-b=-(b-a)>0 \Longleftrightarrow b-a<0$（公理 3）

$\Longleftrightarrow b<a$.（公理 4）

同样可以证明：若 $b<a$，则 $a>b$.

定理 2 若 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$.

证明：$a>b$ 且 $b>c$，

$\Longrightarrow a-b>0$ 且 $b-c>0$，（公理 4）

$\Longrightarrow (a-b)+(b-c)>0$，（公理 5）

即 $\quad a-c>0$

$\Longrightarrow a>c$（公理 4）

定理 3 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

证明：$a>b \Longrightarrow a-b>0$（公理 4）

又因 $a-b=(a+c)-(b+c)$，故 $(a+c)-(b+c)>0$，

$\Longrightarrow a+c>b+c$.（公理 4）

推论 （不等式的移项法则）不等式中任何一项，可以把它的符号变成相反的符号后，从不等式的一边移到另一边.

例如：$a+b>c \Longrightarrow a>c-b$. 这相当于 $a+b+(-b)>c+(-b)$.（定理 3）

定理 4 若 $a>b$ 且 $c>0$，则 $ac>bc$.

证明： $a>b \Longrightarrow a-b>0$，（公理 4）

又因 $c>0 \Longrightarrow (a-b)\cdot c>0$，（公理 6）

即 $ac-bc>0 \Longrightarrow ac>bc$.（公理 4）

定理 5 若 $a>b$ 且 $c<0$，则 $ac<bc$.

证明： $a>b \Longrightarrow a-b>0$，（公理 4）

又因 $c<0$，$\Longrightarrow (a-b)\cdot c<0$，（公理 6）

即 $ac-bc<0$，$\Longrightarrow ac<bc$.（公理 4）

定理 6 若 $a>b$ 且 $c>d$，则 $a+c>b+d$.

证明： $a>b$ 且 $c>d$，

$\Longrightarrow a-b>0$ 且 $c-d>0$，（公理 4）

$\Longrightarrow (a-b)+(c-d)>0$（公理 5）

即 $(a+c)-(b+d)>0$，

$\Longrightarrow a+c>b+d$.（公理 4）

定理 7 若 $a>b$ 且 $c<d$，则 $a-c>b-d$.

证明： $c<d \Longrightarrow -c>-d$，（定理 4）

又因 $a>b \Longrightarrow a+(-c)>b+(-d)$，（定理 6）

即 $a-c>b-d$.

定理 8 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

证明： $a>b$ 且 $c>0$，

$\Longrightarrow ac>bc$，（定理 4）

同理可证：$bc>bd$，

$\Longrightarrow ac>bd$.（定理 2）

定理 9 若 $a<b$，且 a、b 同号，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

证明：因 a、b 同号，$\Longrightarrow a\cdot b>0$，（公理 6）

又因 $\frac{1}{ab}\cdot ab=1>0 \Longrightarrow \frac{1}{ab}>0$，（公理 6）

但 $a<b \Longrightarrow a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}$，（定理 4）

即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，$\Longrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.（定理 1）

定理 10 若 $a<b$，$c>d$，且 a、b、c、d 都是正数，则 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

证明：$c>d$ 且 $c>0$，$d>0$，

$\Longrightarrow \frac{1}{c}<\frac{1}{d}$，（定理 9）

又因 $a<b \Longrightarrow a\cdot\frac{1}{c}<b\cdot\frac{1}{d}$，（定理 8）

即 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

定理 11 若 $a>b>0$，n 为正整数，则 $a^n>b^n$.

证明：$a>b>0 \Longrightarrow a^2>b^2$（定理 8）

$\Longrightarrow a^3>b^3$（定理 8）……

$\Longrightarrow a^n<b^n$.（反复多次应用定理 8）

定理 12 若 $a>b>0$，n 是大于 1 的整数，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

证明：采用反证法证明.

$\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 的大小关系，只可能是如下三种情况之一：

(1) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$；

(2) $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$；

(3) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

若 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \implies (\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n$，即 $a=b$. 这与已知条件 $a>b$ 相矛盾，故这是不可能的；

若 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \implies (\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n$（定理11）即 $a<b$. 这与已知条件 $a>b$ 相矛盾，故也是不可能的；

于是，(1)、(2)两种情况都不可能，因而(3)这种情况必然成立. 即 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

从这关于不等式基本性质的十二条定理可推得如下关于不等式之间的运算法则：

(1) 同向不等式两边分别相加，所得的不等式与原不等式同向.（定理 6）

这个法则简称为“同向不等式可以相加，不等号不变”.

(2) 异向两个不等式的两边分别相减，所得的不等式和被减不等式的不等号同向.（定理 7）

这个法则简称为“异向两个不等式可以相减，不等号与被减不等式同向”.

这里必须强调指出：两个不等式的两边相加，必须是同向不等式；两个不等式的两边相减，必须是异向不等式. 这是因为两个异向不等式相加，或者两个同向不等式相减，都不能得出确定的结果.

例如，异向不等式相加：

由 $8>5$ 和 $3<4$ 两边相加得：$11>9$；

由 $8>5$ 和 $3<6$ 两边相加得：$11=11$；

由 $8>5$ 和 $3<7$ 两边相加得：$11<12$.

同向不等式相减：

由 $8>5$ 和 $4>3$ 两边相减得：$4>2$；

由 $8>5$ 和 $6>3$ 两边相减得：$2=2$；

由 $8>5$ 和 $7>3$ 两边相减得：$1<2$.

因此，仅仅知道 $a>b$ 和 $c<d$，还不能断定 $a+c$ 与 $b+d$ 中哪一个大，哪一个小；（因 $a+c>b+d$，$a+c=b+d$，$a+c<b+d$ 三种可能都存在.）同样：仅仅知道 $a>b$ 和 $c>d$，也不能断定 $a-c$ 与 $b-d$ 哪一个大，哪一个小.

(3) 两边都是正数的同向不等式，两边分别相乘，所得不等式与原不等式的不等号同向.（定理 8）

这个法则也可以说成："两边都是正数的同向不等式可以相乘，不等号不变".

(4) 两边都是正数的两个异向不等式两边分别相除，所得的不等式与被除不等式的不等号同向.（定理10）

这个法则也可以说成："两边都是正数的两个异向不等式可以相除，不等号与被除不等式同向".

在这里要强调指出：不等式两边相乘或相除时，不等式两边是正数，这个条件是不可忽视的，因为若不限制两边是正数，法则(3)和(4)就不正确了.

例如：

由 $2>-3$ 和 $2>-2$ 两边相乘得：$4<6$；

由 $2>-3$ 和 $3>-2$ 两边相乘得：$6=6$；

由 $-2>-3$ 和 $2>0$ 两边相乘得：$-4<0$；

由 $4>-2$ 和 $-2<2$ 两边相除得：$-2<-1$；

由 $2>-2$ 和 $-2<2$ 两边相除得：$-1=-1$.

即同向不等式相乘，所得的不等式可能不再是同向不等式，而是异向不等式或等式. 异向不等式相除，所得的不等式的不等号可能不再与被除不等式同向而是异向或变成等式.

这里也要指出：两个异向不等式不能相乘，两个同向不等式不能相除. 因为既使两边都是正数的异向不等式相乘或者两