一元微积分浅析

王小铭
徐启荣

广东人民出版社

一元微积分浅析

王小铭　徐启荣

广 东 人 民 出 版 社

一元微积分浅析

丁小铭　徐启荣

*

广东人民出版社出版
广东省新华书店发行
广东新华印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　6.5印张　127,000字
1984年11月第1版　1984年11月第1次印刷
印数1—15,800册
书号7111·1312　定价0.79元

编 者 的 话

数学中研究函数的领域称为数学分析。在普通数学分析课程中，一元函数微积分是最重要的基础。一元函数微积分，或者叫做一元微积分，是以一元函数为研究对象的一种最简单的微积分。随着我国教育事业的发展，一元微积分已经逐渐成为中学数学课程的重要内容之一。

在中学里，一元微积分的教学内容主要包括数列和极限，导数和微分，导数与微分的应用，不定积分和定积分及其应用。教学大纲只要求学生掌握微积分的基本概念和基本运算。对于概念的精确描述，理论系统的严格化和微积分的大量应用问题都留待学生日后去学习。因此，教学的重点是着重基本概念的引入和理解、基本运算的意义和方法以及微积分的一些初步应用。

为了紧密配合中学数学教学的需要，我们编写了这本适合中学生阅读的«一元微积分浅析»。其目的是让学生在学习过程中，特别是在学完了基本课程以后，进一步加深对有关概念和运算法则的理解，更好地掌握课程内容，并为进一步学习微积分打下良好的基础。

本书与一般的微积分学读物有所区别，内容重点放在对概念的分析和理解上。§ 1至§ 8是对一元微积分中的函数、极限、无穷小量、连续、导数与微分、不定积分和定积分等重要概念进行比较详细的分析。分析时，着重解释概念的引入、定义的描述、它们的几何意义和物理意义、对定义的理

解、各个概念间的内在联系以及它们在微积分学中的地位。

在§9中，我们还对一元微积分的三种基本运算，即极限运算、微分运算和积分运算的方法作比较全面的归纳，其中着重介绍各种运算方法的特点及使用场合，并通过例子加以说明。

§10是一元微积分的应用题，包括导数概念的应用、函数最大（小）值的应用和定积分的应用，重点介绍分析问题和解决实际问题的方法。

书后的〔附录一〕“微积分学简史”是我们根据有关数学史料整理而成的，对了解微积分学的产生和发展有一定的参考价值。

本书是中学生课外读物，不是教科书，因而除内容的选取和处理不同于一般的教材之外，叙述时力求简明扼要，显浅易懂。在介绍一些重要理论问题时既注意知识的严谨，又尽可能做到深入浅出。为了使同学们更好地掌握书中的知识，除§9外，每节都编有适量的练习题，书后还附有部分习题的答案与提示。

本书也适合中专学生课外阅读，并可供中学、中专数学教师参考。

本书在编写过程中，承华南师范大学数学系汤慕忠、李吉桂和执信中学叶世雄等同志审阅，并提出了宝贵意见，在此谨向他们表示深切的感谢。

编者

一九八二年元月

目　　录

§1 函数关系和它的各种形式

在自然界，在工农业生产和科学研究中，我们离不开各种各样的量，诸如时间，路程，温度，物体的受力，农作物的产量等等．一切事物都在不停地运动，各种量也不断地变化，当我们取定了单位制之后，每个量的大小就表现为数值．在数学中，通常抽去量的物理意义而只注意它们的数值．

在研究过程中，数值保持不变的量我们称它为常量，而可以取不同数值的量称为变量．我们知道，每一个变量的变化都不是孤立的，它要受到另一个或多个变量的影响．变量之间的这种相依的关系，在数学上就用函数关系来表达．函数是微积分学的研究对象．

我们先来看这样一个实例．图 1.1 是自动温度记录仪记下的一昼夜的气温曲线，横轴表示时间，纵轴表示气温．一天中，气温随着时间的

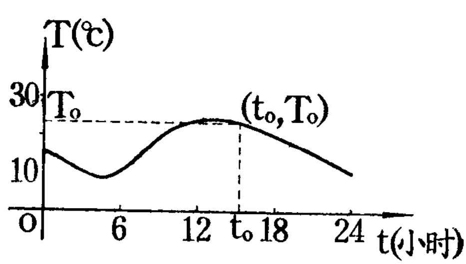

图 1.1

变化而变化。黎明前气温最低，日出后大气受热而气温升高，这个升温过程在下午达到顶峰。从傍晚开始，大气散热，气温下降，到第二天的黎明前又达到最低点。这是一个变量（气温）随着另一个变量（时间）而变化的明显例子。在这种情况下，我们说，这两个变量之间存在着函数关系。

但是，如果把这种直观的描述作为数学上函数关系的严格定义是不够准确的。在历史上，人们对函数关系的认识也曾经历过这个初级的阶段，由于它没有揭示出函数关系的本质而给函数研究带来很多不便。后来，随着科学的发展，人们对函数关系的认识有了新的突破。那么，应当怎样去看函数关系的本质呢？我们仔细分析气温和时间的函数关系就会明白：上面所说到的“气温随着时间的变化而变化”这句话实际上有两层意思，首先，时间和气温这对变量在我们的研究中所处的地位是不同的。在我们眼中，时间 t 可以在 0 到24小时（一昼夜）内任意取值，而气温 T 只能随时间而变，它不是任意的。前者叫自变量，后者叫因变量，也叫做自变量的函数。其次，指出了气温的值完全由时间的值来确定。例如我们要求出某时刻 t_0 时的气温，只要在气温曲线上找出横坐标为 t_0 的点，这个点的纵坐标 T_0 就是当时的气温值（见图1.1）。对于从 0 到24这个范围内的每一个时间的值，都可以按照这个规则找到确定的气温值和它对应。在这种对应关系下，如果时间 t 的取值不断变化，与之对应的气温值也跟着起变化。所以气温和时间的函数关系，实质上是时间和气温这两个变量的值按照一定的规则互相对应的一种关系。

对于一般的函数关系来说，情况完全类似。变量之间的函数关系尽管在具体形式上千差万别，但是有一点是共同的，那就是自变量的值和函数值之间的对应关系。函数关系的本质就是对应。在数学史上，首先用对应的思想来定义函数的是德国数学家狄里赫勒（Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805—1859），这是人类对函数关系认识的一个飞跃。

在现代数学里，“对应”这个概念占有重要的地位。下面介绍一些有关对应的知识，这可以帮助我们更深刻地理解函数的概念。

定义1.1 设A和B是两个非空的集合(不一定是数集!)，如果存在一个规则φ，使得对于A中的任何一个元素x，按照规则φ，在B中都能得到一个确定的元素y，记为φ：$x \mapsto y$，那么这个规则φ是从集合A到集合B的一个对应。y叫做x在对应规则φ下的象，x叫做y的原象（见图1.2）。

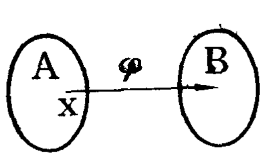

图1.2

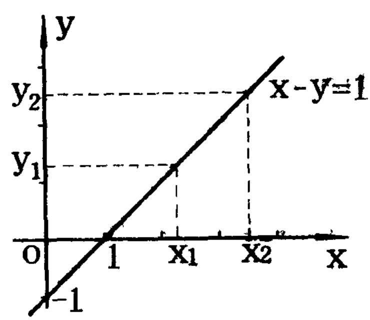

图1.3

例1.1 设A是平面上所有的圆组成的集合，B是平面上所有的点所成的集合。令对应规则φ表示每个圆与它的圆心的对应。因为平面上的每个圆都有一个确定的圆心，即A中的每个元素（圆）在B中都有一个确定的象（点），所以φ就是从集合A到集合B的一个对应。

例1.2 设X表示x轴上所有实数的集合，Y表示y轴上所有实数的集合。令对应规则φ表示由x值与满足方程$x-y=1$的y值相对应。很明显，对于每一个x值都可以由方程解出唯一确定的y值。因此φ就是从集X到集Y的一个对应（见图1.8）。而集合X和Y都是实数集R，所以φ又是从R到自身的一个对应。

例1.3 A和B均为正整数集，令对应规则φ表示A中的正整数n对应B中的$n+1$。则φ是从A到B的一个对应。

我们这里说的对应是指A的每个元素在B中只有唯一确定的一个象，这种对应叫做单值对应，也叫做从集合A到集合B的一个映射。有时候情况不是这样。在上述的例1.1中，如果我们将对应规则改为平面上的点与以这点为圆心的圆相对应，把这个规则记为ψ，那么，Ψ就不再满足单值的要求了。因为以同一个点为圆心的圆有无穷多个，成为一组同心圆.就是说，B中的每个元素按照对应规则ψ在A中都有无穷多个象。这时，我们需要将对应的定义作一些扩充：如果集合A的元素在集合B中的象不止一个，这样的对应叫做多值对应。

还有一种特殊而重要的对应叫做一一对应。如果从集合

A到集合B的对应满足下列两个条件：（1）A的不同元素的象也不相同；（2）B的每一个元素都是A的某一个元素的象，那么这个对应叫做从A到B的一一对应。形象地说，如果某个对应符合这两个条件，那么集合A和集合B的元素都一个对一个地对应起来，既没有重复、也没有遗漏。显然，例1.2是一个一一对应，而例1.1不是一一个对应。例1.3也不是一一对应，因为在这个对应规则之下，B中的元素1不是A的任何元素的象。

有了对应的概念，我们很容易明白，函数关系其实是两个数集之间的一种对应。

定义1.2 设变量x可以在数集X内任意取值，如果按照某一法则f，对于X中的每一个x值，相应地变量y有一个确定的值和它对应，则变量y叫做变量x的函数，记为$y=f(x)$。x叫做自变量。数集X叫做这个函数的定义域。

这是函数关系的准确定义。在函数的定义中有两个要素：（1）自变量x的取值范围，即函数的定义域X；（2）确定x值和y值之间对应关系的法则f。这两个要素一经确定，函数关系就确定了。至于函数y取值的集合Y（叫做函数的值域）是由定义域X和对应法则f决定了的。因此，没有特别要求时，通常不需要指出。

理解函数定义，我们要注意以下几点：

（1）只有当确定函数关系的两个要素完全相同时，才能说两个函数是相同的。定义域和对应法则都应该考虑，两者缺一不可。有时我们比较注重对应法则而忽略了函数的定义

域，这是不对的。例如函数$y=\frac{x^2-1}{x+1}$和$y=x-1$是两个不同的函数，因为它们的定义域不同。前者的定义域是除-1之外的实数，而后者的定义域是全体实数集R。可见用式子来表示函数关系时是不能随便加以变形的。

（2）两个变量之间是否存在函数关系的标准是看两个变量的值之间是否存在着按照某一对应法则的对应关系。只要存在这样的对应，我们就能断定一个变量是另一个变量的函数，而不用再考虑是否一个变量随着另一个变量而变化这样的问题了。至于对应法则，只要能构成对应，我们对它的形式不加任何的限制。因此，对应法则可以表示为式子（解析法），表示为表格（列表法），表示为坐标平面上的曲线（图象法）或其它的形式。函数关系的表达形式是多种多样的。

（3）建立了函数关系后，自变量x的某一个取值x_0所对应的y值称为函数在$x=x_0$时的函数值，记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。已知自变量的值x_0求函数值$f(x_0)$的过程就是由对应法则f从集合Y中寻找x_0的象$f(x_0)$的过程。

（4）上面我们定义的函数是单值的，函数关系是一种单值的对应.

例1.4 设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$.

这个题目实际上是要我们求出函数关系的对应法则f.注意，这个法则是指由自变量值$x+\frac{1}{x}$得到函数值$x^2+\frac{1}{x^2}$的

对应法则f.因此我们将题中的式子变形

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

由此可知对应法则为$f(x)=x^2-2$

例1.5 表1.1是某班学生的数学成绩表. 根据函数的定义，我们可以说，数学成绩是学号的函数. 这时函数的定义域是不大于30的自然数的集合.

例1.6 函数$y=\begin{cases} x+1 & 当\ x<-1 \\ 0 & 当\ -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2 & 当\ x>0 \end{cases}$

这里，函数的定义域是实数集R。对应法则分三段来表示：当x在区间$(-\infty,\ -1)$上取值时,对应的y值为$x+1$；当x在$[-1,\ 0]$上取值时,对应的y值为0；当x在$(0,+\infty)$上取值时，对应的y值为x^2。这样，使R中的每一个x值都有一个确定的y值和它对应（见图1.4）。从这个例子可以看出，函数的对应法则在定义域的不同部分可以用不同的式子来表达。通常把这样的函数叫做分段函数。

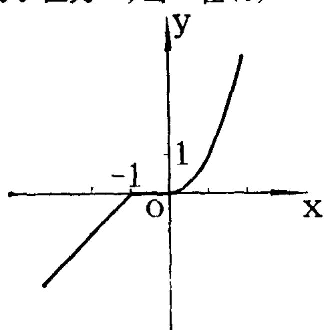

图1.4

大家注意，x在区间$[-1,\ 0]$上无论取什么值，对应的y值都是0，这时函数变成一个常数。函数的定义允许不同的自变量值对应同一个函数值，因此常量可以看成是函数

表 1.1

学　号	成　绩	学　号	成　绩
1	73	16	56
2	80	17	100
3	61	18	75
4	100	19	67
5	85	20	83
6	85	21	87
7	50	22	70
8	63	23	82
9	78	24	64
10	92	25	48
11	75	26	75
12	78	27	80
13	60	28	67
14	80	29	38
15	95	30	90

的一个特例。

例1.7 函数$y=D(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\text{为无理数}\\ 1 & \text{当 } x\text{为有理数}\end{cases}$

定义域为实数集R。凡是x取有理数值，对应的y值均为1；凡x取无理数值时，对应的y值均为0。那么对于x所取的任何一个实数值，y都有一个确定的值和它对应。这个对应法则所确定的函数关系，被命名为狄里赫勒函数，通常记为D(x)。这也是一个分段函数，但是它的定义域（整条数轴）不象例1.6那样被分成完整的几段。

例1.8 函数$y=\pi(x)$ $(x\geqslant 0)$表示不超过x的质数个数。对于每一个非负的实数x，不超过x的质数个数是一个确定的数。例如当$x=0$时，因为没有一个质数小于或等于0，所以对应的y值为0。事实上对于在区间〔0，2）上的所有x值来说，对应的y值都是0。又如当$x=2.5$时，因为不超过2.5的质数只有一个，就是2，所以对应的y值为1。当$x=\sqrt{10}$时，不超过$\sqrt{10}$的质数只有两个：2和3，所以对应的y值为2。如此等等，对于每个x值都存在对应的y值（见图1.5）。这就表示存在着一个函数关系，但对应的法则无法用式子完全地表达出来。

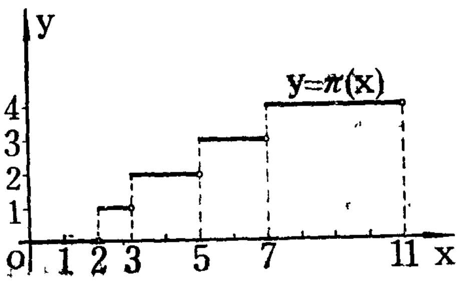

图1.5

例1.9 $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$ $(n \in N)$

大家知道，在上式中，如果 n 顺次取自然数为值时，x_n是一个数列。n 的取值范围是自然数集N．对于每一个自然数 n，由式子可以算出唯一的x_n值和它对应，所以这式子表示一个函数关系，它的定义域是N，可见任何数列都可以看作是一个以自然数为自变量的函数。

例1.10 满足方程$xy-1=0$的变量 x 和 y 也确定一个函数关系。因为对每一个可能的 x 值（$x \neq 0$），由方程可解出唯一确定的 y 值与之对应（见图1.6）。这种由一个含有x和 y 的方程$F(x,y)=0$来确定的函数叫做隐函数。相反，能表示成$y=f(x)$的形式的函数叫做显函数。有些隐函数能够表成显函数的形式，但另一些隐函数是无法化成显函数的，例如函数$x^y = y^x$ $(x \neq y)$。这种函数的隐式表示有时给我们带来很大的便利。

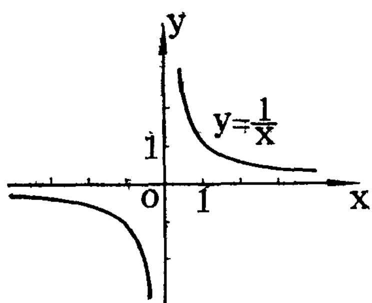

图1.6

例1.11 由方程组$\begin{cases} x = t+1 & \text{(a)} \\ y = 8t-2 & \text{(b)} \end{cases}$ 也确定了 y 和 x 之间的一个函数关系。因为对于每一个 x 的值，由方程(a)解得唯一的 t 值，再以这个 t 值代入方程（b）便得到对

应的 y 值，所以变量 x 和 y 通过 t 也建立了对应的关系（见图1.7)。t 叫做参变量或者参数。这种函数关系叫做由参数方程确定的函数。这种形式的函数关系在表示一些曲线时是很有用的。

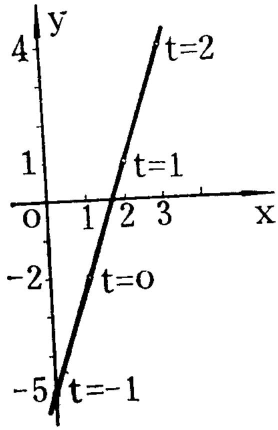

图1.7

除了上面的例子之外，函数的表示方式还有许多，例如有用极限运算表示的，有用级数表示的，有用积分表示的等等。这些知识同学们在今后的学习中还会碰到，这里就不再一一介绍了。

最后，我们讲一下初等函数的概念。在历史上，有一些函数因为比较简单和常用，而且由它们可以构成我们常见的大多数函数关系，因而把它们叫做*基本初等函数*。这些函数包括：*幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数*。由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除运算和有限次复合而成的函数叫做初等函数。微积分学研究的函数大部分都属于初等函数。初等函数这个范畴是历史上形成的，并不是由于这些函数有什么特殊的数学性质而把它们归为一类。

有了关于函数的这些基础的知识，我们就可以开始对函数关系进行比较深入的研究了。