高等工程數學

(下 册)

(複數分析與數值分析)

Advanced Engineering Mathematics

原著者：Peter V. O'Neil

譯述者：徐澧豐　劉伯宏

科技圖書股份有限公司

高等工程數學

（下 册）

（複數分析與數值分析）

Advanced Engineering Mathematics

原著者：Peter V. O'Neil
譯述者：徐澧豐　劉伯宏

科技圖書股份有限公司

這是一本最新出版的高等工程數學教科書。其內容用例題說明新觀念與新技巧，並列舉實際問題作印證，故讀來不覺枯燥之味，但因而使篇幅較其它同類書籍爲多，而其主題反而減少。本書分成上、中、下三册譯印，上册以微分方程式爲主題，中册以向量、向量分析與 Fourier 分析爲主題，下册以複數分析與數值分析爲主題，各册可分開選購以減輕讀者負擔。

本公司經新聞局核准登記
登記證局版臺業字第1123號

書　　名：高等工程數學（下册）
原 著 者：P V. O'Neil
譯 述 者：徐澧豐　劉伯宏
發 行 人：趙國華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
臺北市重慶南路一段49號四樓之1
電　話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號0015697－3

七十三年十月初版　　特價新臺幣 160 元

原　　序

本書包括數學中修畢微積分後，採用的有關現代工程或物理學頗有用處或必需的論題。按其基本性質分爲六大篇

第壹篇　微分方程式
第貳篇　向量與矩陣
第叁篇　向量分析
第肆篇　Fourier 分析與邊界值問題
第伍篇　複數分析
第陸篇　數值解法

某些論題（諸如概率與統計，或變分學等）亦可包括在其中。但，此六篇是構成工程數學課程的核心。筆者盡了最大努力，將教師們認爲重要而必需的論題，均包括在內。

撰寫本書時，曾經試圖保持兩種讀者——學生與教師能充分獲益。第一，本書擬供學生應用。學生採用本書作爲教本，或是參考書，很有希望能精通並活用其中的材料。同時，本書必能供作教師的需要。按照正確的順序，選取正確的論題，用適當的例證與例題加以講解，必會感到方便，同時，尙備有充足而具活用的習題。

認識到此等對象，筆者採取下列諸方針着手

(1) 記錄現有工程數學課程內容，並聽取審核人士的建議，訂定本書中的各論題與順序。
(2) 每種新觀念與技術，均舉例說明，在例題中常包含足夠的細節，使學生很容易遵循進修。
(3) 大多數章節末均附列大量常規習題，並緊跟着一些更具挑戰性問題。有些例題與習題需要採用計算機，此等題目很易予以刪除。

但，著者認爲，既然以實用爲目的而介紹此類題材，便需計及其中的計算。大多數參與實際工作的工程師與科學者，必然少不了用到計算。

(4) 書中包含大量的應用題材，開始對所考慮的現象建立其數學模式，隨即介紹求解所需的數學。

本書的六篇，大部分均可互相獨立；故教師可講授與某部分有關的工程數學順序，不必牽及其它部門，亦不必閱讀本書中許多其它無關的章節。爲能作此種利用，茲介紹各篇中，有關次序及先修課程的若干提要。

第壹篇 微分方程式

第零章到第七章，構成通常在一年級修畢微積分後的第一堂課程，常微分方程式。第零章，要否講授可以不拘的一章；第一、第二兩章爲本篇的基礎，但，諸如Bernoulli與 Reccati 方程式等某些部分可以刪除，或分開來指定作爲自行研讀教材。第三章對往後的教材並無關係，但在 3.6 節中所發展的微分運算子符號，在 7.1 節系統求解中需要用到。但可延後到第七章時再行講授。第四、第五兩章相互獨立，故講授次序可以隨意。因在現代工程中（尤其是電機工程），變換法甚爲重要。故 Laplace 變換中的教材，較平常的每一堂課程內容爲多。此等教材只在第七章求解式組中的短短一節內需要。第六章Bessel函數教材，與第五章級數解法發生關係，在 6.4與6.5 節中包含的 Sturm-Liouville理論與振盪理論，除若干例題外，不需第二章以外的任何教材。最後，在第七章中，授畢 7.1 節後，便可逕行考慮相位平面、臨界點與穩定性。

第壹篇係假設讀者對隱函數與鏈鎖法則的微分，以及積分技術均甚熟悉。此等內容通常均包含在一年級微積分課程中。但亦鼓勵學生利用積分表藉增效率。部分尚需作廣義積分（用於 Laplace 變換，並扼要的用在 6.2 節中與 Bessel 函數相關連的 gamma函數）；冪級數

（用於第五章的級數解，與第六章的特殊函數，5.1節對冪級數作扼要複習）；以及偏導數（主要用於1.4與1.5節中的恰當微分方程式與積分因子相關連的情形。）

第貳篇 向量與矩陣

本書將向量與矩陣劃分成兩章。第九章專講向量代數與幾何。首先的論題作爲點與箭頭的3維向量，隨後爲代數運算的點積、與叉積、以及純量的重積。其方法係屬幾何性質的，其中對採用向量求線與平面方程式，亦提出若干注意事項。作此等考慮之後，緊接着爲 n 維向量，向量空間 R^n，R^n 的子空間，線性獨立、基、維，最後扼要介紹抽象向量空間。對處理第十章中的矩陣，後者可以刪除。第十章各節次與內容如下

矩陣代數：10.1～10.6、10.9節
線性方程式組的解：10.7、10.8節
行列式：10.10、10.11節
行列式的應用：10.12～10.14節
特徵值與其應用：10.15～10.22節
若干特殊矩陣：10.23節

對許多結果均予審愼證明。但諸習題多用計算求解，給予學生們在求線性方程式組、求矩陣的反演、或求特徵值等諸如此類的逐步法則。教師可選取此種運算的一、二種，加以強調說明。

研修第貳篇的學生們，均已讀完一年級微積分課程。但在邏輯上，也許無此必要。學生們若對微積分具有若干背景，似乎較佳。學生必需具有直線與平面觀念，且需學過初等三角學（至少知道正弦與餘弦），用來瞭解點積與叉積。研讀特徵值時，尙需知道些複數計算。

第叁篇 向量分析

本篇僅有一章，計包括向量的微分與積分。各節次與內容分列如下

向量微分，計包括斜率、散度、旋度、速度、與加速度：11.1～11.5節

向量積分，計包括 Gauss，Green 與 Stoke 諸定理：11.6～11.10、11.14節

應用：11.11、11.12節

曲線座標，計包括散度、旋度、斜率、以及用正交曲線座標寫成的 Laplacian 運算子：11.13節

對於此等材料，學生們需知道包括鏈鎖法則在內的偏微分，並對觀察與繪製諸如球面、錐面與柱面等簡單三維曲面，必需具有若干經驗。向量積分定理需採用二重與三重積分。學生必需能用極座標計算二重積分，採用柱面座標與球面座標計算三重積分。最後，尚需得自9.1節與9.3節中的基本向量代數。

第肆篇　Fourier 分析與邊界值問題

本篇共分兩章，一章專論 Fourier 級數、積分、與變換，另一章爲在求邊界值問題中的應用。各節次與內容分列如下

Fourier 級數（包含多重級數）與強制振盪：12.1～12.4、12.8節

Fourier 積分：12.5、12.6節

Fourier 變換：12.9、12.10節

用 Fourier 級數與積分、分離變數法、求解邊界值問題：13.1～13.8節

邊界值問題的 Fourier 與 Laplace 變換解：13.9、13.10節

第十三章的大部分節次，均相互獨立，故可用任何順序講解，或分別予以删減。

對第十二章而言，學生們對函數的無窮級數與廣義積分，需具有若干經驗。大多數學生均未學過多重級數，但若能持有一種直覺方法，仍可處理多重 Fourier 級數。

第十三章的大部分先修項目，計包括所考慮的特定問題中，需用到第十二章中的某些部分。

第伍篇 複數分析

第伍篇爲本書中分量第二重要的部分，共分六章。其內容係按標準進度進行。大致爲：複數算術、複數值函數、微分與分析性、複數積分、Cauchy 定理與其若干結果、Taylor 與 Laurent 級數、殘數與殘數定理、實數值積分與級數總和計算、保形映像、以及某些應用。

學生們要熟悉的，包含兩個實變數的實數值微積分，以及線積分與平面中的 Green 定理。學生們亦需讀過常數值的實數級數，以及一個實變數函數的實數值冪級數。

第陸篇 數值解法

本篇僅有一章，與某些常遇問題的概值解摘要。各節均相互獨立，講授次序不拘。

20.1 至 20.6 節，僅需初等微積分，20.7 至 20.9 節僅需一些常微分方程式知識，20.10 節爲處理 Dirichlet 問題，20.11 節需要熟悉矩陣運算、特徵向量、與特徵值。

爲對讀者作更進一步的服務，在第二十章之後附有補充讀物用的參考書目，蒐集經常需要的公式與資料，定理索引，藉供查考。另附許多單號習題解答。本書尚包含諸如 Fourier 級數與常微分方程式等論題的發展歷史的節次。此等資料有助於瞭解項論題的發展概貌，但一般參考圖書中對此均多疏漏。

謝詞從略

P V. O'Neil 歐尼爾

高等工程數學（下册）

目　錄

原　序

第肆篇　Fourier分析與邊界值問題(續)

第十三章　偏微分方程式

第伍篇　複數分析

第十四章　複數與複數值函數

第十五章 複數平面中的積分

第十六章 複數值數列與級數、與Taylor及Laurnt展開式

第十七章 奇點、殘數與對實數值積分及級數的應用

第十八章 保形映像

第十九章 複數分析的應用

第陸篇 數値解法

第二十章 數值解法

附 錄

第肆篇　Fourier分析與邊界值問題（續）

第十三章　偏微分方程式

13.0 導　言

偏微分方程式（partial differential equation）爲含一個或多個偏導數的方程式。此類方程式發生於含三個或更多變數的相互作用的許多自然現象中。下節將會討論此等情形。

偏微分方程式的解，是指適合其方程式的函數。例如：作直接代入，很易核對式

$$u(x, t) = \cos(2x)e^{-4a^2t}$$

爲下式的解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

在偶然機會中，用觀察便可得解偏微分方程式，但這種情形很少。舉例而言，考慮下式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4 \frac{\partial u}{\partial y}$$

此式具有許多解，且很易猜出其中簡單的一個。若 $\partial u/\partial x$ 與 $\partial u/\partial y$ 兩者均爲常數，便可很易的獲得一解。因之，先試探 $u(x, y) = Ax + By$，求得 $\partial u/\partial x = A$，與 $\partial u/\partial y = B$。若 $A = -4B$，便可得一解。設先選取 $B = 1$ 與 $A = -4$，於是 $u = -4x + y$ 爲其一解。很不幸，通常多不是如此簡單。

若一偏微方程式含 n 階偏導數，且無更高階的偏導數時，稱其爲

n 階（order）。因此，例如 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

爲二階。下列熱方程式也是二階

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

以上求解的簡單方程式則爲一階。

恰好與常微分方程式相同，開始研究偏微分方程式時，通常均集中於線性情形。非線性情形對初學者而言，過於困難。

三個變數（一個相關，兩個獨立）的一般線性一階偏微分方程式爲

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+g(x, y)=0$$

三個變數（一個相關，兩個獨立）的一般線性二階偏微分方程式的形式爲

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+e(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x, y)u+g(x, y)=0$$

所遭遇的大多數方程式均屬上列形式。在此兩種情況中，若對考慮到的所有（x，y）而言，其 $g(x, y)=0$，則方程式爲齊次（homogeneous）。同時，若對某些（x，y）而言，其 $g(x, y)\neq 0$，則爲非齊次（nonhomogeneous）。在齊次情形中，總要尋出一個非平庸解（nontrivial solution），亦即一個不恒等於零的解。

將注意力集中在線性一階與二階方程式的原因，是因其發生頗爲頻仍，尤其二階更是如此。縱使是處理非一般性的情形，此等方程式亦需廣泛的理論，故將花費大部分時間來研究在工程與科學中最易遭遇的，如控制振盪與熱傳導現象等的特殊方程式。所用的主要工具爲 Fourier 級數與積分，同時在本章末，亦會討論到 Fourier 與 Laplace 變換法。

下節將談到某些基本偏微分方程式的導數，作爲開始。

13.0節習題

用觀察與積分法求習題1.到10.中，各已知偏微分方程式的非平庸解。此處，u 爲 x 與 y 兩變數的函數。

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$　2. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y^2$　3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$　4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$　6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$　7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = y$　8. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

9. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} - x = 0$　10. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

對習題11.到16.，求適合已知偏微分方程式與另加條件的解。

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \ u(0, 1) = 2$　12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1;\ \ u(0, 0) = 0$　13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ \ u(1, 1) = 1$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 0;\ \ u(0, 2) = -3$　15. $2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \ u(1, 4) = 7$　16. $y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2;\ \ u(1, 2) = 4$

對習題17.到25.，決定已知方程式形式是否爲線性偏微分方程式，如若不是，試說明其理由。

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

18. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3x^2$

19. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xy^2$

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2e^{xy} = 0$

21. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 4x\cos(xy)$

22. $8x\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y^2$

23. $2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

24. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 4\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

25. $\dfrac{\partial u}{\partial y} - 8\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(x)$

對習題26.到31.，試證實已知函數爲其已知偏微分方程式的一解。

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;\ \ u = e^{-y}\cos(x)$

27. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2};\ \ y = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi at}{L}\right)$ 其中 $n = 1, 2, 3, \ldots$

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;\ \ u = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ for $x > 0,\ y > 0$

29. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $y=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]$ 其爲任一變數可作二次微分之函數

30. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$; $u(x,y,t)=\sin(nx)\sin(my)\cos(\sqrt{m^2+n^2}\,at)$ 其中 n 與 m 爲任何正整數

31. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x\neq 0$, 其爲任一變數可予微分之函數

32. 假設 $u_1(x, y)$ 與 $u_2(x, y)$ 爲一般二階齊次線性偏微分方程式的兩解。

(a) 證明 $u_1(x, y)+u_2(x, y)$ 亦爲其一解。

(b) 證明 $\alpha u_1(x, y)$ 爲其一解，其中 α 爲任何常數。

33. 證明：對非線性偏微分方程式而言，解的和，並不一定是一個解。

13.1 波與熱方程式的導出

本節將導出控制波動與熱傳導的若干偏微分方程式，亦可認爲此等方程式爲當然情形，並直接讀下一節，但此等導數，卻傳授了重要的一課，且爲邊界條件與初值條件的一個角色。通常，偏微分方程式係用時間與一個或多個空間變數的函數來表示。大多數發生在物理問題中，會具有在某時間的資料，譬如說在 $t=0$ 時，此等數值構成初值條件（initial condition）。也常會具位在空間變數不同極端部位的規定條件，得出邊界條件（boundary condition）。

邊界值問題（boundary value problem），計包括一偏微分方程式，及其邊界條件，亦常具初值條件。本節的下一部分將指出如何會發生此種問題，並舉出若干較重要的方程式。

[1] 波方程式

想像一條柔性而具彈力的弦線，置於同一水平的兩栓間並予拉緊，如圖241所示。若用某種方式將弦線拉升，然後放鬆，使其發生在垂直平面上的振動，所導致的運動其性質爲何？

作成此情況的模式時，將 x 軸置於沿弦的長度方向，在靜止時的部位，並將 y 軸置於垂直部位，同時，將原點置在左側栓部位，如圖241所示。在任何時間，與位在任何水平座標值 x 處。設 $y(x, t)$

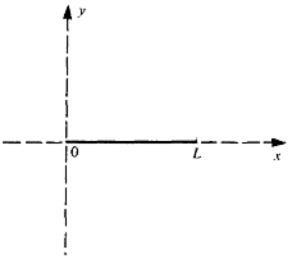

圖 241 自 0 到 L 拉緊的弦

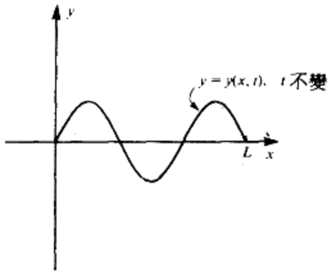

圖 242 在固定時間 t 時，作爲 $y=y(x, t)$ 曲線的弦的圖形

爲弦的垂直位移。如此，在任何已知時間 t 的 $y=y(x, t)$ 圖形，可顯示該時間弦的形狀，如圖 242 所示。現需知道，當 $0 \leq x \leq L$（L 爲兩栓間的距離），與時間 $t>0$ 時的 $y(x, t)$。

導出簡單情形 y 的微分方程式時，係略去諸如空氣阻力與弦的重量等不計，並假設弦中的張力 $T(x, t)$ 的作用，永遠是切線方向。設 ρ 爲單位弦長的質量，並假設 ρ 爲常數。

現就 x 與 $x+\Delta x$ 間一段弦，應用 Newton 定律，如圖 243 所示，必須爲

由張力而起的淨力＝（該段質量）×（該段的加速度）

對微小的 Δx，考慮其垂直分量，得其概值爲

$$T(x+\Delta x, t)\sin(\theta+\Delta\theta) - T(x, t)\sin(\theta) \approx \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

其中，$\bar{x}$ 爲微小段的質量中心，於是得

$$\frac{T(x+\Delta x, t)\sin(\theta+\Delta\theta) - T(x, t)\sin(\theta)}{\Delta x} = \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

爲求方便，將張力的垂直分量寫成 $v(x, t)$，於是上式爲