活题 > 新题 > 成题

初中数学
应用题精讲精练

huo xin cheng ti

丛书主编 张嘉瑾
本册主编 张祖寅　孙孝武

黑龙江人民出版社

活题★新题★成题

初中数学应用题

○精讲精练

丛书主编　张嘉瑾
本册主编　张祖寅
　　　　　孙孝武
本册编委　马锦甫
　　　　　王曙彬
　　　　　戴顺芳

黑龙江人民出版社

责任编辑：刘海滨
封面设计：羽　人

活题·新题·成题
初中数学应用题精讲精练
丛书主编：张嘉瑾
本册主编：张祖寅　孙孝武

黑龙江人民出版社出版、发行
（哈尔滨市南岗区宣庆小区1号楼）
北京电影出版社印刷厂印刷
开本 850×1168毫米　1/32　印张 10
字数：200千字
2002年6月第1版　2002年6月第1次印刷
印数 1-4000

ISBN 7-207-05374-6/G·1163　　定价：13.80元

前　　言

数学的学习，就是数学知识的学习和数学方法的掌握以及运用，其最终目标是提高分析问题和解决问题的能力。而应用性问题与现实生活和生产实际联系密切，它们背景丰富，综合性强，因此解应用题对于培养读者分析问题和解决问题的能力，形成用数学的意识具有十分重要的作用。

这本书会明明白白地告诉你，原来数学和现实如此之近。在你的身边，数学将无处不在。她会陪伴你度过青春年华，跨越考试难关，充实风险人生。

全书共分五章，有解应用题的策略和方法，有现行新教材中典型的传统型问题、最优问题、探索型问题、智力趣味问题等等。每种题型均设四个栏目提炼、精讲、反馈、创新。

提炼　对典型问题的知识要点、解题技巧和化归思想作简明扼要的讲析，提炼本节知识精华所在。

精讲　对那些具有普遍性、适应性的应用

题，进行详尽的分析与解答，不仅如此，而且更重视教会读者怎样思考、怎样学习，对相应的学习方法，技巧加以点拨，达到举一反三的目的。

反馈　根据知识、能力要求，精选了具有代表性、综合性的练习，供读者实际操练、亲身体验，以提高分析问题和解决问题的能力。

创新　注重数学思想方法的阐述，在相关的知识基础上激活、深化，让学有余力的读者去培养创新思维的能力。

本书的编写从学生角度出发，力求内容新颖、实用，为此有些题目取材于最近的报刊、杂志和名家著作，在此对原作者深表谢意。但愿本书能成为初中学生学习的好帮手，教师、家长辅导的好参谋。

午夜的星空，那么深邃，广袤，无边无涯。望你乘上数学之神舟，科学之火箭，闯荡未来的人生，拥抱新的世纪！

张祖寅

二〇〇二年元月

目　录

第一章 应用性问题概述

应用性问题,是指有实际生活背景或有实际应用意义的数学问题,它来自生活、生产实践,参照背景丰富,思考角度全面,解答方法灵活多样.因而应用性问题在加强素质教育和培养读者分析问题、解决问题的能力方面有着独特的作用.

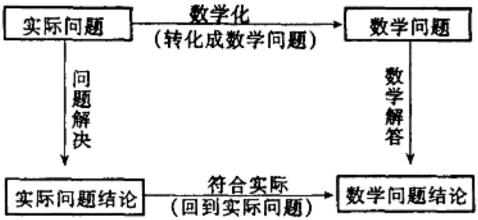
这里所说的应用性问题,不只是单纯指数学问题和传统的应用题——行程问题、工程问题、百分含量问题、数字问题和测量问题等,还包括反映时代气息、中学生能力所及的实际问题、随着改革的深入,经济的不断发展,出现在现代生活中的营销问题、决策问题、生产计划安排等,题型设计立意新颖,紧密结合实际,又如纸盒加工、窗框设计、银行存贷利率、房屋租金、粮食总产量和人口增长等等,都反映了当代人的实际生活情景.因此,应用性问题具有较强的综合性,它要求解题者自己观察分析,创造性地综合应用知识,灵活、敏捷地解决问题.

设计联系生产和生活实际的应用题,其目的在于培养读者把实际问题抽象成数学问题的能力,逐步把数学知识应用到生产、生活实际、形成运用数学的意识,所以在近年来,全国各地中考试题中,涉及应用性问题的范围和所占分额呈上升趋势.

一、应用性问题解决策略

解数学应用问题,首先要认真仔细地分析题意,认清问题的各项已知条件、需求解决的对象,各种量之间的相互关系,将实际问题转化为数学问题,然后再运用已学过的数学知识和方法去解决问题,得出合理的答案.

一般思路如下表：



因此，解决应用性问题的一般程序是：

①审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系；

②建模：将文字语言转化为数学语言，利用数学知识，建立相应的数学模型；

③求模：求解数学模型，得出数学结论；

④还原：将用数学知识和方法得出的结论，还原为实际问题的意义.

有不少同学怕数学应用题，认为应用问题太难，难在哪里呢？“怕”的主要原因是看不懂题意，分不清题目中所涉及的数量关系及其联系，也就列不出数学关系式，无法动手去做.因此，读懂题意是解决问题的前提，转化成数学关系式建立数学模型是关键.这里，首先要读懂题意，在读懂题意时要注意以下四个方面的问题：

(1)对普通语言和数学语言的识别、理解、解释、弄清问题中语言表述的全过程.

(2)对数学语言进行转换，如文字语言转化为图形语言或将图形语言转化为文字语言，将文字语言、图形语言转化为数学关系式.

(3)进行数学化，列出数学关系式，建立数学模型，主要有方程或方程组模型、不等式模型、函数模型和几何模型等.

(4)能正确地加以表述,写出解决问题的全过程,要求层次清楚,合乎逻辑,说理充分,根据确切,论述完整.

在这几点里,弄清题意是解决问题的基础,列出正确的关系式是关键,也最为困难.分析题意时,必须明确哪些是已知量,哪些是未知量,还要搞清问题所涉及的等量关系.

应用问题的等量关系一般可分两种.

一种是明显的等量关系.是通过问题中的一些关键词语表现出来的.例如:“多”、“少”、“快”、“慢”、“提前”、“超过”、以及“剩余”、“和”、“差”、“是几倍”、“增加几倍”、“增加到几倍”、“增加百分之几”、“增长率”等等,它们与方程有着直接关系,因此在审题时必须弄清它们的确切意义找出这些关键词语.

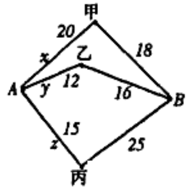
另一种是潜在的等量关系.例如:速度×时间=距离,比重×体积=重量,溶质÷溶液=百分含量,工作量÷工作效率=工作时间,以及周长、面积、体积(或容积)公式,几何中的有关定理,三角、物理、化学中的有关公式,还有特殊的等量关系,如:在追及运动中,两速度的差×时间=原来的距离;在相向匀速运动中,两速度的和×时间=距离;顺水航行中,顺流速度=船速+水速;逆流航行中,逆流速度=船速-水速等等.这些潜咱的等量关系在应用问题中都不明显给出,必须在审题分析题意才能得到.

因此,在解应用题时,能有意识地注意以上几个方面,就能不断提高解应用题的能力,“怕”字也就很快消失!

下面结合一例加以说明:

甲、乙、丙三个火力发电厂,每月需用煤依次为45万吨、40万吨和75万吨,它们的煤来自 A、B 两个煤矿,已知它们到 A 矿的距离依次为20、12和15千米,到 B 矿的距离依次为18、16和25千米,并知 A、B 两矿可拿出60万吨和100万吨的煤供应三个厂正常发电,如果每吨煤每千里的运费为一个定值,问怎样按排使得总运费最低.

分析 本题涉及实际背景中的量，主要有：甲、乙、丙三厂每月用煤量，甲、乙、丙三厂到 A、B 两矿的距离，A、B 两矿可拿出的煤及每吨煤每千米运费（常量），A、B 两矿供应给甲、乙、丙三厂的煤（变量）.



设每吨煤一千米的运费为 a 万元；A 矿供应甲、乙、丙三厂的煤分别为 x、y、z 万吨，

并且 $x+y+z=60$.

则 B 矿供应甲、乙、丙三厂的煤分别为 $45-x$、$40-y$、$75-z$ 万吨.

为便于列式，可画出草图.

设总运费为 $W=Ta$（a 是定值），则

$T=(20x+12y+15z)+[(45-x)\cdot 18+(40-y)\cdot 16+(75-z)\cdot 25]=2x-4y-10z+3325$,

其中 $0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60, 0\leqslant z\leqslant 60$.

这就是所建的数学模型.

利用 $z+y+x=60$，将 T 进行变形如下：

$$\begin{aligned} T &= 3325+2x-4(y+z)-6z \\ &= 3325+2x-4(60-x)-6z \\ &= 3085+6x-6z. \end{aligned}$$

要使总运费 W 最低，只要 T 最小，于是只有 x 最小，z 最大时 T 才能取得最小值.

由于 $0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant z\leqslant 60$.

所以当 $x=0, z=60$ 时，T 取得最小值为 2725.

故当 A 矿煤全部供应丙厂，而 B 矿煤供应给甲、乙、丙三厂的煤分别为 45、40 和 15 万吨时总运费最低，最低运费为 2725 a 万元.

该题体现了解答应用问题的过程，由审题、建模、求模、写出答案的过程中，体现了解应用题的思维过程.

二、应用题的分析方法

方法一 译式法

译式法就是将题中关键性的语言译成代数式.

例 从少先队夏令营到城市,先下山然后走平路,某队员先骑自行车以每小时 12 千米的速度下山,以每小时 9 千米的速度通过平路到达城市共用 55 分钟,他回来时,以每小时 8 千米的速度通过平路,以每小时 4 千米的速度上山回到夏令营,用了 $1\frac{1}{2}$小时,问夏令营到城市有多少千米?

解法一 设山路之长为 x 千米,

则下山需 $\frac{x}{12}$ 小时,上山需$\frac{x}{4}$ 小时,

下山通过平路需 $\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{12}\right)$ 小时,

上山通过平路需 $\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)$ 小时,

平路之长是 $9\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{12}\right)$ 千米,

平路之长或是 $8\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)$ 千米.

依题意可列出方程: $9\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{12}\right)=8\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)$.

解得 $x=3$.

所以, $9\left(\frac{11}{12}-\frac{3}{12}\right)=6, 3+6=9$.

答 从夏令营到城市有 9 千米.

解法二 设平路之长为 x 千米.

则下山通过平路需 $\frac{x}{9}$ 小时，上山通过平路需 $\frac{x}{8}$ 小时.

下山需 $\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{9}\right)$ 小时，上山需 $\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right)$ 小时，

山路之长是 $12\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{9}\right)$ 千米，

山路之长或是 $4\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right)$ 千米.

依题意列出方程：$12\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{9}\right)=4\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right)$.

解得 $x=6$.

所以，$12\left(\frac{11}{12}-\frac{6}{9}\right)=3$，　$6+3=9$.

答　从夏令营到城市有 9 千米.

解法三　设山路之长为 x 千米，平路之长为 y 千米.

依题意可列出方程组：

$$\begin{cases}\frac{x}{12}+\frac{y}{9}=\frac{11}{12},\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解法四　设山路之长为 x 千米，夏令营到城市距离为 y 千米.

依题意列出方程组：

$$\begin{cases}\frac{x}{12}+\frac{y-x}{9}=\frac{11}{12},\\ \frac{x}{4}+\frac{y-x}{8}=1\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解法五　设平路之长为 x 千米，夏令营到城市距离为 y 千米.

依题意列出方程组：

$$\begin{cases}\frac{x}{9}+\frac{y-x}{9}=\frac{11}{12},\\ \frac{x}{8}+\frac{y-x}{4}=1\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解法六 设下山为 x 小时，上山为 y 小时.

依题意列出方程组:

$$\begin{cases}12x = 4y,\\ 9\left(\frac{11}{12} - x\right) = 8\left(1\frac{1}{2} - y\right).\end{cases}$$

解法七 设去时走平路用 x 小时，回时走平路用 y 小时.

依题意列出方程组:

$$\begin{cases}9x = 8y,\\ 12\left(\frac{11}{12} - x\right) = 4\left(1\frac{1}{2} - y\right).\end{cases}$$

解法八 设下山用 x 小时，回时走平路用 y 小时.

依题意列出方程组:

$$\begin{cases}12x = 4\left(1\frac{1}{2} - y\right),\\ 8y = 9\left(\frac{11}{12} - x\right).\end{cases}$$

解法九 设去时走平路用 x 小时，上山用 y 小时.

依题意列出方程组:

$$\begin{cases}9x = 8\left(1\frac{1}{2} - y\right),\\ 4y = 12\left(\frac{11}{12} - x\right).\end{cases}$$

因为，此题明显的未知数只有一个，即夏令营到城市之间的距离，但它与本题的已知条件无直接的等量关系，所以直接设这个距离为未知数来列方程就比较困难，因此我们采用了间接的设法.

由于此题有山路之长、平路之长、下山所需时间、上山所需时间，去时走平路所需时间、回时走平路所需时间六个潜在的未知数，故此题用潜在的未知数或用潜在的未知数辅以明显的未知数有以上九种解法，由于此题未知数较多，所以还能列出三元一次方

程组、四元一次方程组等解法,但列法都比较复杂,就不一一列出了.

请读者注意,上例各种不同的解法,是出于各种不同的思路,我们为了掌握列方程解应用问题的本领,对于每一个题都应当练习从不同的思路去列方程,来提高解应用问题的能力.

方法二　列表法

在遇到条件较多关系复杂的应用题时,可以列出表格来分析题意,把已知条件和所求(未知数)纳入表格,从而找出各种量之间的关系,利用等量关系来建立关系式.

例　A 城到 B 城的公路长 50 千米,一人骑自行车,一人坐摩托车,摩托车出发晚 $1\frac{1}{2}$小时而早到 1 小时,若已知摩托车的速度为自行车的 $2\frac{1}{2}$倍,问二者的速度各是多少?

解　设自行车的时速为 x 千米.

则摩托车的时速为 $2\frac{1}{2}$千米.

摩托车出发晚 $1\frac{1}{2}$小时又早到 1 小时,就是比骑自行车少用 $\left(1\frac{1}{2}+1\right)$小时,

自行车由 A 城到 B 城所需时间是 $\frac{50}{x}$ 小时,

摩托车由 A 城到 B 城所需时间 $\frac{50}{2\frac{1}{2}x}$ 小时,

依题意列出方程:

$$\frac{50}{x}=\frac{50}{2\frac{1}{2}x}+\left(1\frac{1}{2}+1\right).$$

于是 $x=12$，$2\frac{1}{2}\times 12=30$，

答 自行车时速 12 千米，摩托车时速 30 千米.

这个问题如果按下表来表明各量，对研究其关系更为直观.

车别＼关系	时间	速度	距离
自行车	$\frac{50}{x}$	x	50
摩托车	$\frac{50}{2\frac{1}{2}x}$	$2\frac{1}{2}x$	50

因此，对于比较复杂的应用问题，采用列表法可以帮助我们透彻地理解题意，明确已知量与未知量的相互关系，列出关系式.

下面将各类型有普遍性的应用问题，采用列表法列关系式，举例如下：

［工程问题］

例 某工程，甲单独做需 12 天完成，乙单独做需 15 天完成，如果甲先做 3 天，然后由乙加入一同做，乙加入后几天可以完成这样工程？

工人＼关系	工作量		时间		工作效率
	全部	已完成	需用	实数	
甲	1	$\frac{x+3}{12}$	12	$x+3$	$\frac{1}{12}$
乙	1	$\frac{x}{15}$	15	x	$\frac{1}{15}$

根据题意可列出方程：

$$\frac{x+3}{12}+\frac{x}{15}=1,$$

或 $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)x+\frac{3}{12}=1.$

[行程问题]

例　甲、乙二货车都由一城到560千米外的生产队运送肥料支援春耕，每小时甲车比乙车多走10千米，因而早到1小时，求两车的速度？

车别 \ 关系	时　间	速　度	距　离
甲	560	x	$\frac{560}{x}$
乙	560	$x-10$	$\frac{560}{x-10}$

根据题意可列出方程：　$\frac{560}{x}+1=\frac{560}{x-10}$.

[水流问题]

例　一船逆流行 $22\frac{1}{2}$ 千米，顺流行 $28\frac{1}{2}$ 千米，共用8小时，测得水流速度为每小时 $2\frac{1}{2}$ 千米，求此船在静水中的速度.

设船在静水中的速度为每小时 x 千米

逆流所需时间	顺流所需时间	来回共用时间
$\dfrac{22\frac{1}{2}}{x-2\frac{1}{2}}$	$\dfrac{28\frac{1}{2}}{x+2\frac{1}{2}}$	8

可根据题意列出方程：

$$\frac{22\frac{1}{2}}{x-2\frac{1}{2}}+\frac{28\frac{1}{2}}{x+2\frac{1}{2}}=8.$$