中等专业学校教材

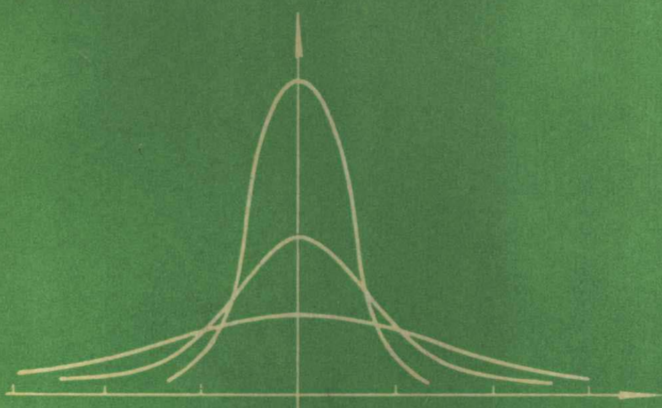
工科专业通用

数学

第四册

工科中专数学教材编写组编

上海市中专数学教材编写组修订



高等教育出版社

中等专业学校教材

工科专业通用

数　学

第四册

工科中专数学教材编写组编
上海市中专数学教材编写组修订

高等教育出版社

本书是受原教育部委托，由上海市教育局中专处组织的上海市中专数学教材编写组在1980年版中专《数学》(工科各专业通用)第四册的基础上，根据1983年修订的《中专数学教学大纲》的要求修订而成。主要内容为级数、行列式、矩阵和线性方程组、拉氏变换、概率、数理统计等。与第一版比较，删去了逻辑代数，增加了数理统计初步。其余各章内容的深广度也略有增加。

本书供招收初中毕业生的中等专业学校工科各专业作为教材使用，也可供招收高中毕业生的工科各专业选用。

中等专业学校教材

工科专业通用

数　学

第四册

工科中专数学教材编写组编

上海市中专数学教材编写组修订

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 14.75　字数 304,000

1980年8月第1版

1986年7月第2版　1986年8月第1次印刷

印数 00,001--152,200

书号 13010·01263　　定价 1.80 元

目　　录

第二十一章　级　　数

级数是高等数学的一个重要组成部分，它是进行数值计算及解微分方程的一种工具．本章先介绍无穷级数的一些基本概念，然后讨论如何将函数展开成幂级数与三角级数的问题．

§21-1　常数项级数

一　常数项级数的基本概念

在生产实践和科学实验中，我们常会遇到无穷数列求和的问题，先看下面求圆面积的例子．

我国古代东汉时期的《九章算术》一书中，提出了一个求圆面积的计算方法：

先作一个圆的内接正六边形，以这个正六边形的面积 a_1 作为圆面积 A 的近似值．

再在这个六边形的每条边上各作一个顶点在圆周上的等腰三角形(图 21-1)，这六个等腰三角形的面积之和为 a_2，a_1+a_2 是圆的内接正十二边形的面积．如果以 a_1+a_2 作为圆面积 A 的近似值，那末这个近似值比 a_1 作为圆面积 A 的近似值要精确一些．

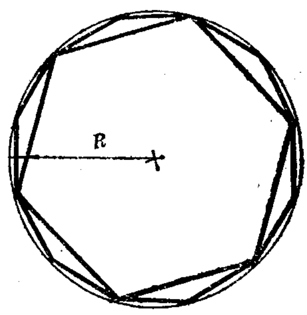


图　21-1

用同样的方法，在所得到的正十二边形的每一边上再分别各作顶点在圆周上的等腰三角形．这十二个等腰三角形的面积之和为 a_3，那末 $a_1+a_2+a_3$（圆的内接正 24 边形的面积）是圆面积 A 的更精确的近似值．

如此继续进行 n 次，便得到圆面积 A 的近似值为

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

它是圆的内接正 3×2^n 边形的面积．

魏末晋初时代，刘徽在注释《九章算术》时（公元 263 年），对于这种求圆面积的方法提出了一个极限思想．他写道："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失"．就是说这个圆面积 A 的近似值，作为分割成正六边形与三角形面积的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，分割得越细，即 n 越大，其近似程度就越好，当"分到不能再细分"了，即当 n 大到不能再大时，那末就得到了圆面积 A 的精确值．这种想法蕴含了一种极限的观点．按近代极限观点，数值 n 的变大是不受到限制的，所以圆面积 A 的值就等于当 n 趋于无穷大时，和数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

的极限．也就是说，圆面积 A 是无穷多个数累加的和，即

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

对于这类无穷多个数的求和问题，我们给出下面的定义：

定义 1 设给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

则表达式
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

其中 u_n 称为级数的第 n 项，也称**一般项**或**通项**．如果 u_n 是常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为**常数项级数**；如果 u_n 是函数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为**函数项级数**．

例如
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots;$$
$$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n+\cdots;$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

都是常数项级数．又如
$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots;$$
$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots$$

都是函数项级数．

本节，我们先讨论常数项级数．

无穷级数是无穷多个数累加的结果，这就无法象通常有限个数那样可以直接把它们逐项相加．但上面关于计算圆面积的方法告诉我们，可以先求有限项的和，然后运用极限的方法来解决这个无穷多项的累加问题．

定义 2 对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，它的前 n 项之和
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
称为级数的**部分和**．如果当 $n\to\infty$ 时，S_n 有极限 S，即
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S;$$
则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**收敛的**，并称 S 为该级数的和，即
$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

如果当 $n\to\infty$ 时，S_n 没有极限，则称这级数是发散的。

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，级数的和 S 与它的部分和 S_n 之差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项，以部分和 S_n 作为和 S 的近似值所产生的误差，就是这个余项的绝对值 $|r_n|$.

首项为 a，公比为 q 的无穷等比数列的和

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

称为**等比级数**.

当 $|q|<1$ 时，我们已经知道，上述等比级数的和为

$$S = \frac{a}{1-q},$$

即它是收敛的；

当 $|q|\geqslant 1$ 时，上述等比级数的部分和 S_n 没有极限，所以它是发散的。

例 1 判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

是否收敛？若收敛，求它的和.

解 因为该级数的一般项可变形为

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此前 n 项的和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

即级数收敛，其和等于 1.

例 2 判断级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\text{共 8 项}}+\cdots$$

是否收敛？

解 $S_1=1$;

$$S_2=1+\frac{1}{2};$$

$$S_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2};$$

$$S_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2};$$

....

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{\text{共 } 2^{k-1} \text{ 项}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{\text{共 } k \text{ 项}}=1+\frac{k}{2}\quad(k\text{ 为自然数}),$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{k}{2}\right)$，该极限不存在．于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 也不存在，即所给级数发散。

二　级数的基本性质

根据上述无穷级数收敛和发散的定义，可以得到无穷级数的下列基本性质：

性质1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S，则对任一常数 c，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\cdot u_n$ 也收敛，其和为 cS.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的部分和分别为 S_n 和 σ_n，则

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = cS_n.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛，其和为 cS.

从关系式 $\sigma_n = cS_n$ 可知，级数的每一项乘以同一个不为零的常数后，它的敛散性不变。

性质2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别为 S' 和 S''，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S' \pm S''$.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S'_n、S''_n 和 σ_n，则

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= S'_n \pm S''_n.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S'_n \pm S''_n) = S' \pm S''.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，其和为 $S' \pm S''$.

我们把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的和

(差)。

例 3 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}$ 是否收敛？若收敛，求其和。

解 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 是公比 $q=\frac{1}{3}$ 的等比级数，它是收敛的，且其和为 $\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ 是公比 $q=-\frac{1}{3}$ 的等比级数，它也是收敛的，且其和为 $\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{4}$，所以根据性质 2，可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right]$$

收敛，其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$$
$$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

性质 3 一个级数增加或减少有限项，不改变级数的敛散性（证明从略）。

一个级数增加或减少有限项后，虽然其敛散性不变，但在一般情况下它的和是会改变的。

例如，$a=1$，$q=\frac{1}{2}$ 的等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 是收敛的，减去它的前五项得到级数 $\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$，显

然仍是收敛的，但前一级数的和为 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$，后一级数的和为 $\dfrac{\dfrac{1}{32}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{16}$.

三　级数收敛的必要条件

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，它的一般项可表示为

$$u_n=S_n-S_{n-1}.$$

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，显然 S_n 和 S_{n-1} 有相同的极限 S，因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}\\&=S-S=0.\end{aligned}$$

于是就得到了下述重要结论：

定理　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

根据这个定理，如果级数的一般项 u_n，当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于零，则该级数必发散.

例如，$\dfrac{1}{1}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}+\cdots$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$ 不存在，即当 $n\to\infty$ 时，它的一般项不趋于零，因此这级数是发散的.

还须注意的是：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 只是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件，并不是充分条件．例如，从例 2 的级数可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$u_n\to0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，但它是发散的.

由此可知，一个发散的级数，它的一般项可以趋于零，也

可以不趋于零。

习　题　21-1

1．写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+n^2}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)}$。

2．写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$；

(3) $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$；

(4) $1+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\cdots$；

(5) $\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{10}-\frac{a^5}{17}+\frac{a^6}{26}+\cdots$。

3．根据级数收敛与发散的定义，判别下列级数的敛散性，如果收敛，则求其和：

(1) $1+2+3+\cdots+n+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(3) $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

4．判别下列级数的敛散性：

(1) $e-e^2+e^3-e^4+\cdots$;

(2) $1+\ln 3+\ln^2 3+\ln^3 3+\cdots$;

(3) $1-\ln 2+\ln^2 2-\ln^3 2+\cdots$;

(4) $1+\ln 0.6+\ln 0.6^2+\ln 0.6^3+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(6) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

§21-2 常数项级数的审敛法

在一般情况下，要判断一个级数的敛散性，只利用级数收敛、发散的定义和性质，常常是很困难的，因此需要建立判断级数敛散性的审敛法。下面介绍两种常数项级数的审敛法.

一 正项级数的审敛法

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项都是非负数，即 $u_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，则称该级数为正项级数.

下面给出正项级数的一个基本的审敛法。

比较审敛法 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，且 $u_n \leqslant v_n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 1 判别级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$ 的敛散性.

解 因为 $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 在

上节例1中已知它是收敛的，所以根据比较审敛法，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

也是收敛的.

再根据级数的基本性质3，可知所给级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

是收敛的.

当 $p>0$ 时，级数

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{1}$$

称为 p-级数. 当 $p=1$ 时，(1)成为

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{2}$$

称为调和级数. 上述例1中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 就是 $p=2$ 的 p-级数.

例2 讨论 p-级数的敛散性.

解 (1) 当 $p=1$ 时，将级数(2)与级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \tag{3}$$

比较. 级数(3)的每一项都不超过级数(2)的相应项的值，即

$$1=1,\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}<\frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{8}<\frac{1}{6},\ \frac{1}{8}<\frac{1}{7},\ \frac{1}{8}=\frac{1}{8},\ \cdots$$

利用上节例2的结论：级数(3)是发散的，所以级数(2)（即调和级数）也发散.

(2) 当 $0<p<1$ 时，将 $\frac{1}{n^p}$ 与 $\frac{1}{n}$ 作比较. 这时 $n>n^p$，所以 $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^p}$. 已知以 $\frac{1}{n}$ 为一般项的级数(2)发散，所以级数(1)在 $p<1$ 时也发散.

(3) 当 $p>1$ 时，将级数(1)与级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots \tag{4}$$

比较. 级数(1)的每一项都不大于级数(4)的相应的项，即

$$1=1,\ \frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^p},\ \frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p},\ \frac{1}{4^p}=\frac{1}{4^p},$$

$$\frac{1}{5^p}<\frac{1}{4^p},\ \frac{1}{6^p}<\frac{1}{4^p},\ \frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p},\ \cdots.$$

在计算级数(4)的部分和时，依次将级数(4)的一项，二项，四项，八项…括在一起①，即

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots,$$

它是一个公比 $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$ 的等比级数，所以级数(4)收敛. 因此根据比较审敛法可知，当 $p>1$ 时 p-级数是收敛的.

综合上述讨论，可知当 $0<p\leqslant 1$ 时，p-级数是发散的；当 $p>1$ 时，p-级数是收敛的.

例如，级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots \tag{5}$$

① 在正项级数的计算中，可以用加括号的方法，对一般级数，则不能加括号.