



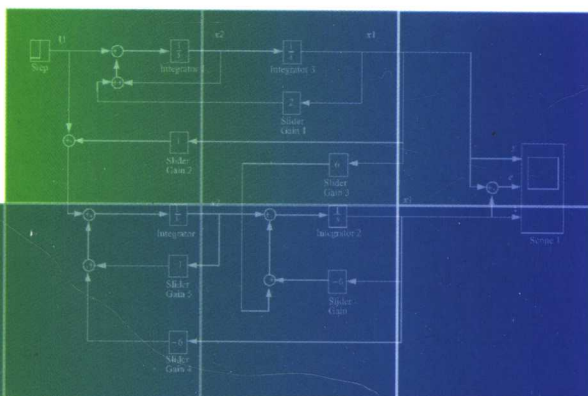
21st CENTURY

实用规划教材

21世纪全国高等院校

自动化系列

实用规划教材



现代控制理论基础

侯媛彬 嵇启春 编 著
张建军 杜京义



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校自动化系列实用规划教材

现代控制理论基础

侯媛彬 嵇启春 张建军 杜京义 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是 21 世纪全国高等院校实用规划教材之一, 并按照教育部自动化类专业本科教学大纲编写的。本书共分为 7 章, 内容包括系统的状态空间模型、状态方程的解、系统的能控性与能观测性、动态系统的稳定性分析、极点配置与观测器设计、最优控制、自适应控制。本书在选材上, 力图内容全面, 重点突出, 讲明基本概念和方法, 尽量减少繁琐的数学推导, 并给出一些结合工程应用的例题。另外配合各章内容给出了 MATLAB 软件的开发程序。本书附带有动画课件、各章配套的源程序、实验指导书、各个实验配套的源程序及其注释程序等内容, 可在出版社相关网站上下载, 本书既可作为自动化和电气自动化专业的本科教材, 也适用工程硕士和非自动化专业硕士选用, 还可作为有兴趣的读者自学与应用的参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/侯媛彬等编著. —北京: 北京大学出版社, 2006. 1
(21 世纪全国高等院校自动化系列实用规划教材)

ISBN 7-301-10512-6

I. 现… II. 侯… III. 现代控制理论—高等学校—教材 IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 003443 号

书 名: 现代控制理论基础

著作责任者: 侯媛彬等 编著

责任编辑: 李 虎 李娉婷

标准书号: ISBN 7-301-10512-6/TP · 0878

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> <http://www.pup6.com>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667

电子信箱: pup_6@163.com

排 版 者: 北京东方人华北大彩印中心 电话: 62754190

印 刷 者: 河北涿县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 14.5 印张 330 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 20.00 元

《21 世纪全国高等院校自动化系列实用规划教材》

专家编审委员会

主任委员 张德江

副主任委员 (按姓氏拼音顺序排名)

陈 静 丁坚勇 侯媛彬

纪志成 任庆昌 吴 斌

秘书长 于微波

委 员 (按姓氏拼音顺序排名)

陈志新 戴文进 段晨旭 樊立萍

范立南 公茂法 关根志 嵇启春

蒋 中 雷 霞 刘德辉 刘永信

刘 原 马永翔 孟祥萍 孟彦京

聂诗良 王忠庆 吴旭云 燕庆明

杨新华 尤 文 张桂青 张井岗

总 序

我们所处的时代被称为信息时代。信息科学与技术的迅速发展和广泛应用,深深地改变着人类生产、生活的各个方面。人类社会生产力发展和人们生活质量的提高越来越得益于和依赖于信息科学与技术的发展。自动化科学与技术涉及到信息的检测、分析、处理、控制和应用等各个方面,是信息科学与技术领域的重要组成部分。在我国经济建设的进程中,工业化是不可逾越的发展阶段。面对全面建设小康社会的发展目标,党和国家提出走新型工业化道路的战略决策,这是一条我国当代工业化进程的必由之路。实现新型工业化,就是要坚持走科技含量高、经济效益好、资源消耗低、环境污染少、人力资源优势得到充分发挥的可持续发展的科学发展之路。在这个过程中,自动化科学与技术起着不可替代的重要作用,高等学校的自动化学科肩负着人才培养和科学研究的光荣的历史使命。

我国高等教育中工科在校大学生数占在校大学生总数的 35%~40%,其中自动化类学生是工科各专业中学生人数最多的专业之一。在我国高等教育已走进大众化阶段的今天,人才培养模式多样化已成为必然的趋势,其中应用型人才是我国经济建设和社会发展需求最多的一大类人才。为了促进自动化领域应用型人才培养,发挥院校之间相互合作的优势,北京大学出版社组织出版了这套“21 世纪全国高等院校自动化系列实用规划教材”。

参加这一系列教材编写的基本上都是来自地方工科院校自动化学科的专家学者,由此确定了教材的使用范围,也为“实用教材”的定位找到了落脚点。本系列教材具有如下特点:

(1) 注重实用性。地方工科院校的人才培养规格大多定位在高级应用型,对这一大类人才的培养要注重面向工程实践,培养学生理论联系实际、解决实际问题的能力。从这一教学原则出发,本系列教材注重实用性,注意引用工程中的实例,培养学生的工程意识和工程应用能力,因此将更适合地方工科院校的教学要求。

(2) 体现新颖性。更新教材内容,跟进时代,加入一些新的先进实用的知识,同时淘汰一些陈旧过时的内容。

(3) 院校间合作交流的成果。每一本教材都有几所院校的教师参加编写。北京大学出版社先后在西安市和长春市召开了编写计划会和审纲会,来自各院校的教师比较充分地交流了经验,在相互借鉴、取长补短的基础上,形成了编写大纲,确定了编写原则。因此,这一系列教材可以反映出各参编院校一些好的经验和作法。

(4) 这一系列教材几乎涵盖了自动化类专业从技术基础课到专业课的各门课程,到目前为止,列入计划的已有 30 多门,教材种类多,参与的院校多,参加编写人员多。

地方工科院校是我国高等院校中比例最大的一部分。本系列教材面向地方工科院校自动化类专业教学之用, 将拥有众多的读者。教材专家编审委员会深感教材的编写质量对教学质量的重要性, 在审纲会上强调了“质量第一, 明确责任, 统筹兼顾, 严格把关”的原则, 要求各位主编加强协调, 认真负责, 努力保证和提高教材质量。各位主编和编者也将尽职尽责, 密切合作, 努力使自己的作品受到读者的认可和欢迎。尽管如此, 由于院校之间、编者之间的差异性, 教材中还是难免会出现一些问题和不足, 欢迎选用本系列教材的教师、学生提出批评和建议。

张德江

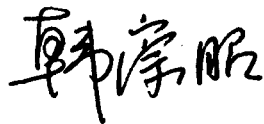
2006 年 1 月

序

现代控制理论是对古典控制理论的进一步发展,它包括线性系统理论、最优控制、现代系统辨识及自适应控制等多个分支。现代控制理论主要研究多输入多输出(MIMO)系统的建模、分析和综合。MIMO系统是以状态空间法为理论,以状态空间模型作为描述受控对象的数学模型,主要对系统的能控性、能观测性及稳定性等品质进行分析;设计状态观测器使系统品质达到最佳;或者以泛函、变分法为理论基础,采用极值原理、动态规划对系统进行最优控制。而系统辨识、自适应控制也是现代控制理论的研究领域。从现代控制理论诞生以来,不论在理论还是应用方面一直处于十分活跃的状态,它不仅在航空航天领域取得了惊人的成就,而且工业、军事等领域都得到了广泛的应用。随着受控对象的复杂程度增加,激发了智能控制的崛起与发展。智能控制理论的主要研究对象则是更复杂的系统,特别是对具有非线性特性的过程(系统)的预测、辨识或控制,才能显示智能控制理论的优势。

侯媛彬系我们西安交通大学培养的工学博士。现为西安科技大学博士生导师、陕西省重点学科“控制理论与控制工程”学科带头人,兼任中国自动化学会教育委员会委员、陕西省自动化学会常务理事及教育委员会主任。多年来一直从事自动化方面的教学和研究工作,讲授过博士、硕士和本科各层面的专业课程 10 多门,其中主讲“自动控制原理”和“现代控制理论”均有 10 多个循环。在国内外公开发表学术论文 100 多篇,其中被 EI 和 ISTP 检索 20 多篇。出版专著、教材 8 部,承担省部级科研项目及横向项目 10 余项,获科技进步奖和教学方面的各种奖 10 多项。该教材的另三位编者西安建筑科技大学嵇启春教授、西安石油大学副教授张建军博士及西安科技大学杜京义副教授也都是在自动化专业从事教学多年,讲授现代控制理论课程多个循环的教师。

本书在选材上,力图内容全面,重点突出,讲明基本概念和方法,尽量减少繁琐的数学推导,并给出一些结合工程应用的例题。另外各章给出了结合本章内容的 MATLAB 软件的开发程序。本书的教学辅助资料包括 6 个附录,附录 1 到附录 3 为相关说明及试验指导,附录 4 为用 Authorware 和 Flash 软件制作的动画课件,附录 5 和附录 6 分别为结合现代控制理论实验及配合各章的仿真源程序,读者可从书中获得知识和程序开发的方法。



2005 年 12 月

前 言

控制理论从内容上,可分为古典控制理论、现代控制理论和智能控制理论。若从时间上划分:1958年前为古典控制理论发展时期;1958年到1978年为现代控制理论发展时期;从1978年复杂的大系统理论问世,开始了智能控制理论的发展。古典控制理论主要讨论单输入单输出(Single Input Single Output,简称SISO)系统的建模、分析和综合设计。智能控制理论的主要研究对象是复杂系统。现代控制理论是对古典控制理论的进一步发展,它包括线性系统理论、最优控制、现代系统辨识及自适应控制等多个分支。对现代控制理论的奠基做出重大贡献的有苏联庞特里亚金(Понтрягин)的极值原理,美国贝尔曼(Bellman)的动态规划和匈牙利卡尔曼(Kalman)的滤波、能控性与能观测性理论。现代控制理论主要研究多输入多输出(Multiply Input Multiply Output,简称MIMO)系统的建模、分析和综合。MIMO系统是以状态空间法为理论,以状态空间模型作为描述受控对象的数学模型,主要对系统的能控性、能观测性及稳定性等品质进行分析,必要时对系统的状态空间模型变换、状态结构分解进行分析,在此基础上,采用状态反馈对系统重构,设计状态观测器使MIMO多变量的系统品质达到最佳;或者以泛函、变分法为理论基础,采用极值原理、动态规划对系统进行最优控制。而系统辨识、自适应控制都又是现代控制理论的很大的研究领域。现代控制理论在其诞生的近50年来,不论在理论还是应用方面一直处于十分活跃的状态,它不仅在航空航天领域取得了惊人的成就,而且在冶金、石油、纺织、煤炭、医疗、企管等自然科学和社会科学领域都得到了广泛的应用。

本书是21世纪全国高等院校自动化系列实用规划教材之一,按照教育部自动化类专业本科教学大纲编写。教学学时为50学时。该教材的四位编者均是在自动化专业一线从事教学多年,讲授本课程多个循环的教师。在选材上,力图内容全面,重点突出,讲明基本概念和方法,尽量减少繁琐的数学推导,并给出了一些结合工程应用的例题。另外第1章到第7章给出了结合该章内容的MATLAB软件的开发程序。本书附带的教学辅助资料包括6个附录:附录1为二次型及其定号性;附录2为MATLAB软件在控制中常用指令说明;附录3为本课程的实验指导书;附录4为用Authorware和Flash软件制作的动画课件;附录5为结合现代控制理论实验开发的源程序及其说明;附录6为配合各章的仿真源程序。

全书共分为7章,前5章为线性系统理论,第6章为最优控制,第7章为自适应控制。其中第2章和第3章由西安建筑科技大学嵇启春老师编写;第4章的第1节到第5节和第5章的第1节到第5节由西安石油大学张建军老师编写;第6章和第7章由西安科技大学杜京义老师编写;第1章、第4章的第6节、第5章的第6节和附录1、附录2、附录3和附录5内容由西安科技大学侯媛彬老师编写;附录4动画课件由王勇老师和侯媛彬老师制作;附录6由几位作者共同编写。全书由侯媛彬老师和嵇启春老师统编。本书还得到了西安科技大学、西安建筑科技大学、西安石油大学及北京大学出版社第六事业部林章波主任及李虎等老师的支持,在此一并表示感谢。

由于编者的能力有限,错误之处在所难免,欢迎读者批评指正并提出宝贵意见。

编著者

2005年10月

目 录

第 1 章 状态空间模型.....1	2.5 小结.....56
1.1 状态空间模型表示法.....1	2.6 习题.....56
1.1.1 状态空间法的基本概念.....1	第 3 章 能控性与能观测性.....58
1.1.2 状态空间模型的一般形式.....3	3.1 线性连续系统的能控性与能观测性...58
1.1.3 状态空间模型的建立.....4	3.1.1 线性系统的能控性
1.2 状态空间模型的图示法.....9	定义及判据.....58
1.3 连续系统的数学模型转换.....14	3.1.2 线性系统的能观测性
1.3.1 由状态空间模型转换成	定义及判据.....66
传递函数阵.....14	3.1.3 对偶性原理.....71
1.3.2 传递函数(阵)转换为状态	3.1.4 输出能控性.....72
空间模型.....17	3.2 线性离散时间系统的能控性
1.4 离散系统的数学模型转换.....28	与能观测性.....73
1.4.1 离散系统的状态空间模型	3.2.1 线性定常离散时间系统
与传递函数(阵).....28	的能控性定义及判据.....74
1.4.2 线性系统的离散化.....29	3.2.2 线性定常离散时间系统
1.5 基于 MATLAB 的系统	的能观测性定义及判据.....75
数学模型转换.....32	3.3 能控标准型与能观测标准型.....78
1.6 小结.....35	3.3.1 系统的等价变换.....79
1.7 习题.....36	3.3.2 能控标准型.....79
第 2 章 线性系统的运动分析.....37	3.3.3 能观测标准型.....83
2.1 线性定常系统状态方程的解.....37	3.4 线性定常系统的结构分解.....84
2.1.1 齐次状态方程的求解.....37	3.4.1 能控性结构分解.....85
2.1.2 矩阵指数函数 e^{At} 的性质.....39	3.4.2 能观测性结构分解.....87
2.1.3 矩阵指数函数 e^{At}	3.4.3 系统状态的标准分解.....89
的计算方法.....40	3.5 最小实现.....92
2.1.4 非齐次状态方程的求解.....46	3.5.1 实现问题的定义.....92
2.2 线性时变系统状态方程的解.....48	3.5.2 可实现的条件.....92
2.2.1 线性时变系统的状态	3.5.3 最小实现.....92
转移矩阵.....48	3.6 MATLAB 应用.....98
2.2.2 线性时变系统状态	3.7 小结.....104
方程的解.....48	3.8 习题.....105
2.3 线性定常离散时间系统的运动分析...51	第 4 章 稳定性分析.....108
2.4 利用 MATLAB 分析状态空间模型.....54	4.1 李雅普诺夫稳定性定义.....108

4.2 李雅普诺夫间接法	110	5.8 习题	164
4.2.1 线性定常系统的稳定性	110	第 6 章 最优控制	166
4.2.2 非线性系统的稳定性	111	6.1 最优控制的基本概念	166
4.3 李雅普诺夫直接法	112	6.1.1 系统最优问题的描述	166
4.4 线性定常系统的李雅普诺夫 稳定性分析	118	6.1.2 最优控制的分类和有关的 几个基本概念	168
4.5 离散时间系统的李雅普诺夫 稳定性分析	122	6.2 在控制作用不受约束时实现最优 控制的必要条件	169
4.6 基于 MATLAB 的系统 稳定性分析	124	6.2.1 函数的极大与极小值	170
4.7 小结	125	6.2.2 没有约束条件下的动态 最优化问题	173
4.8 习题	126	6.3 有约束条件时的最优控制问题	176
第 5 章 极点配置与观测器的设计	127	6.4 庞特里亚金最小(大)值原理	180
5.1 反馈控制结构	127	6.4.1 哈密尔顿方程与极值 控制条件	181
5.1.1 状态反馈	127	6.4.2 最小(大)值原理	183
5.1.2 输出反馈	128	6.5 最小时间控制	185
5.1.3 状态反馈的性质	129	6.5.1 线性定常系数最小时间 控制问题的概述	185
5.2 单输入极点配置	130	6.5.2 惯性的最小时间控制	188
5.2.1 能控标准形的极点配置	131	6.6 线性二次最优控制问题	190
5.2.2 非能控标准形的极点配置	132	6.6.1 线性调节器的物理意义	191
5.2.3 状态反馈在工程设计中 的应用	136	6.6.2 有限时间线性最优调节器	191
5.3 多输入系统的极点配置	137	6.7 MATLAB 在最优控制中的应用	195
5.3.1 能控系统的极点配置	137	6.8 小结	199
5.3.2 不完全能控系统的 极点配置	143	6.9 习题	199
5.4 观测器及其设计方法	145	第 7 章 自适应控制系统	202
5.4.1 观测器的设计思路	145	7.1 自适应控制的任務	202
5.4.2 全阶观测器的设计	147	7.2 自适应控制的理论问题	203
5.4.3 降阶观测器的设计	150	7.3 模型参考自适应系统	204
5.5 用状态观测器的反馈系统	154	7.4 自校正控制系统	208
5.5.1 用状态观测器的反馈 系统性能讨论	154	7.5 其他形式的自适应控制器简介	215
5.5.2 动态补偿器的设计	157	7.6 MATLAB 在自适应系统中的应用	216
5.6 MATLAB 在极点配置及设计 观测器中的应用	161	7.7 小结	217
5.7 小结	164	7.8 习题	218
		参考文献	219

第 1 章 状态空间模型

对多输入多输出(MIMO)系统的建模分析常用状态和状态空间的概念,现代控制理论就是在多变量的状态和状态空间基础上发展起来的,建立系统的状态空间模型是最首要的问题。因此本章首先介绍状态空间模型表示法,包括状态空间的概念和状态空间模型的建立;其次介绍状态空间模型的图示法;重点讨论连续系统的数学模型的转换,其中包括从状态方程求解系统的传递函数矩阵,将传递函数阵变换成能控标准型、能观标准型、对角标准型或约当标准型;然后是离散系统的传递函数阵及其转换;最后介绍基于 MATLAB 的系统数学模型转换。

1.1 状态空间模型表示法

1.1.1 状态空间法的基本概念

实际中存在输入输出关系完全不同的两类系统。一类系统是只要给定输入信息,则可立即获得输出信息,这类系统输入和输出之间关系是一个代数方程,例如各种比例放大器。另一类系统的输出信息确定,不仅要考虑系统施加的输入信息,还必须考虑系统的初始条件,这类系统输入和输出之间关系要用微分方程来描述。例如,一个直流电源 $u(t)$ 和电感 L 串联的电路,当接通电源时,电路的微分方程由式(1.1)给出

$$L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (1.1)$$

则电路输出(电感电流) $i(t)$ 和输入电压 $u(t)$ 之间的关系可写成式(1.2)的形式,即

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + I_0 \\ &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

式中, I_0 为初始时刻 t_0 在电感 L 中流过的电流。由于电感是贮能元件,能把初始时刻 t_0 以前的输入信息以磁能的形式贮存在电感线圈中,因此初始电流 I_0 为在 $[-\infty, t_0]$ 时间区间的电流 $i(t)$ 积分。从而可见,对于诸如这类含有贮能元件的系统,在 t 时刻的输出信息不但依赖于 $[t_0, t]$ 时间区间内所施加给系统的输入信息,而且还依赖于初始时刻 t_0 以前的输入信息。这是一个按确定规律随时间演化的系统,并称之为动态系统。由于动态系统的理论来源于古典力学,故又称之为动力学系统。

引用一个纯动力学系统的例子,设有一个质量为 m 的质点,其运动方程由牛顿第二定律描述为式(1.3),即

$$ma(t) = f(t) \quad (1.3)$$

或

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) \quad (1.4)$$

则质点在 t 时刻的速度 $v(t)$ 和施加在质点上的力 $f(t)$ 之间的关系由式(1.5)表示为

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + v_0 \quad (1.5)$$

式中 m ——质点的质量;

a ——质点在 t 时刻的加速度;

v_0 ——在 $[-\infty, t_0]$ 时间区间内作用在质点 m 上的作用力所产生的初始速度。

比较式(1.2)和式(1.5), 上述的电感电路和该质点的动力学模型具有相同的输入输出关系, 因此, 能够贮存输入信息量的系统都能用微分方程来描述, 则这类能用微分方程描述的系统称之为动态系统。

所谓“动态”是指描述系统的过去、现在和将来的运动情况。上述质点在 t 时刻的位移 $y(t)$ 可由式(1.6)来描述

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) \quad (1.6)$$

如果令 $m=1$, 位移 $y(t)$ 又可写成式(1.7), 即

$$y(t) = y(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2} f(t)t^2 = y(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2} a(t)t^2 \quad (1.7)$$

从而可见, 若要确定某一时刻的位移 $y(t)$, 不仅要给定作用力 $f(t)$, 还必须了解质点的初始位置 $y(t_0)$ 和初始速度 $v(t_0)$ 。也就是说, 该质点每一时刻的状态, 除了给定作用力外, 必须用该时刻的位置和速度这两个物理量才能完全描述。这两个物理量就是能够完全描述该系统运动状态的一组变量, 这一变量可以构成一个二维空间。

下面介绍有关状态空间描述的“状态”、“状态向量”、“状态空间”几个基本术语。

状态: 动态系统的状态, 是指能完全描述系统时域行为的一个最小变量组。该变量组中的每一个变量被称为状态变量。所谓的完全描述, 是指若给定了 t_0 时刻这组变量的初值, 且给定了 $t \geq t_0$ 时系统的输入函数, 则该系统在 $t \geq t_0$ 的任何时刻的行为就可以完全确定了。所谓最小的变量组, 是指变量组中的每个变量都是相互独立的。

状态向量: 若一个系统有 n 个状态变量, 即 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 用这 n 个状态变量作为分量构成的列向量 $x(t)$, 称为该系统的状态向量, 即

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T \quad (1.8)$$

状态空间: 状态向量 $x(t)$ 的所有可能值的集合在几何学上叫状态空间。或者说由 $x_1(t)$ 轴、 $x_2(t)$ 轴 $\dots$ $x_n(t)$ 轴所组成的 n 维空间称为状态空间。

状态空间中的每一个点, 对应于系统的某一特定状态。反过来, 系统在任意时刻的状态都可用状态空间中的一个点来表示。显然, 系统在不同时刻下的状态, 可用状态空间中的一条轨迹表示。轨迹的形状, 完全由系统在 t_0 时刻的初态 $x(t_0)$ 和 $t > t_0$ 时的输入函数以及系统本身的动力学特性所决定。在古典理论中所讨论的相平面就是一个特殊的二维空间。

1.1.2 状态空间模型的一般形式

在现代控制理论中, 状态空间模型所能描述的系统可以是单输入单输出(SISO)的, 也可以是多输入多输出(MIMO)的。状态空间表达式是一种采用状态描述系统动态行为(动态特性)的时域描述的数学模型。它包含状态方程和输出方程。状态方程是一个一阶向量微分方程, 输出方程是一个代数变换方程。

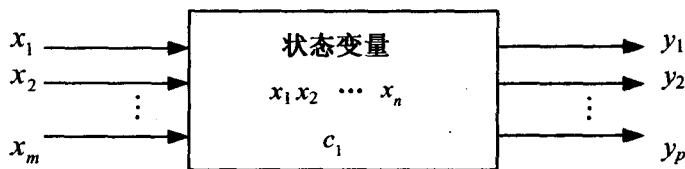


图 1.1 系统表示

设描述某一动态系统的一个状态向量 $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$ (这里 T 为矩阵的转置), 如图 1.1 所示。显然, 该系统是 n 阶系统, 若系统有 m 个输入 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, 有 p 个输出 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_p$, 且分别记 $\mathbf{u}(t) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_m]^T$ 和 $\mathbf{y}(t) = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \cdots \ y_p]^T$, 则系统的状态空间模型的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.10)$$

式中, $\mathbf{f}(\cdot) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n]^T$ 是 n 维向量函数; $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ 是 p 维向量函数。式(1.9)是一阶向量微分方程, 也可以看作由 n 个一阶微分方程所构成的方程组, 称其为系统的状态方程; 式(1.10)是一个代数方程, 表示系统的输出量和输入量以及状态变量之间的关系, 称之为系统的输出方程, 或称为观测方程。这两个方程总称为系统的状态空间表达式。

如果状态空间表达式所描述的系统是线性的, 则式(1.9)和式(1.10)可以写成

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.12)$$

式中, $\mathbf{u} \in R^m, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{y} \in R^p$, $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$ 分别为 $n \times n$ 维状态矩阵、 $n \times m$ 维输入(控制)矩阵、 $p \times n$ 维输出矩阵和 $p \times m$ 维传递矩阵。其元素都是时间 t 的函数。因此, 式(1.11)和式(1.12)所描述的系统是线性时变系统。如果这些矩阵的所有元素都是与 t 无关的常数, 则称为时不变或线性定常系统。线性定常系统的状态空间模型由式(1.13)和式(1.14)给出, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.14)$$

在实际中, 通常 $n > m$, 传递矩阵 $\mathbf{D}$ 常为零; 时间变量 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 可以简写成 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$, 因此, 线性定常系统可用 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 表示, 也可简写成式(1.15)的形式, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.15)$$

如果是 SISO 线性定常系统, 可以用 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 表示, $\mathbf{b}$ 为 $n \times 1$ 维输入矩阵, $\mathbf{c}$ 为 $1 \times n$ 维

输出矩阵。

1.1.3 状态空间模型的建立

要建立状态空间表达式，首要问题是选取状态变量，状态变量一定要是系统中相互独立的变量。对于同一系统，状态变量选取的不同，所建立的状态空间表达式也不同，通常选取状态变量采取以下三种途径。

(1) 选择系统中储能元件的输出物理量作为状态变量，然后根据系统的结构用物理定律列写出状态方程。

(2) 选择系统的输出及其各阶导数作为状态变量。

(3) 选择能使状态方程成为某种标准形式的变量作为状态变量。

一般常见的实际工程控制系统，按其能量属性可分为电气(包括电网络、电机等)、机械、液压、热力学等，根据其物理定理，如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等，可以建立系统的状态方程，当指定系统输出后，便可方便地写出系统的输出方程。另外，既然动态系统是一个贮存输入信息的系统，则根据系统中储能元件及其相应的能量方程也能方便地建立起状态方程。

状态变量的选取直接影响系统状态空间表达式的形式。不同物理性质的两个系统，可能得到同维数的、形式相似的状态空间表达式；而同一系统由于选择状态变量不同，会得到完全不同形式的状态空间表达式。

这里先讨论选择系统中储能元件的输出物理量作为状态变量的方法。为了便于理解，将常见的主要储能元件及其能量方程列于表 1-1。

表 1-1 常见的主要储能元件及其能量方程

序 号	储能元件	能量方程	物理变量
1	电容 C	$Cu^2/2$	电容 C 的电压 u
2	电感 L	$Li^2/2$	电感 L 的电流 i
3	质量 M	$Mv^2/2$	质量 M 的位移速度 v
4	转动惯量 J	$J\omega^2/2$	旋转角速度 ω
5	弹簧 K	$ky^2/2$	位移 y

下面举例讨论系统状态方程的建立。

[例 1.1] 如图 1.2 所示的 RLC 电路，试以电压 u 为输入，以电容 C 上的电压 u_c 为输出变量，列写其状态空间表达式。

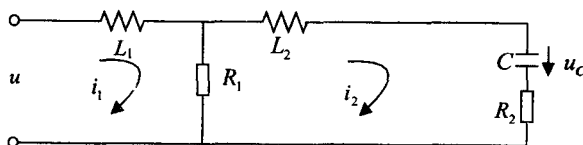


图 1.2 RLC 电路

【解】图 1.2 所示电路的储能元件有电感 L_1, L_2 和电容 C 。根据基尔霍夫定律列写电路方程:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - R_1 i_2 = u \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_2 - R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_c = 0 \\ C \frac{du_c}{dt} = i_2 \end{cases}$$

考虑到 i_1, i_2, u_c 这三个变量是独立的, 故可确定为系统的状态变量, 经整理, 上式变为

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{R_1}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} u \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1}{L_2} i_1 - \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_2 - \frac{u_c}{L_2} \\ \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_2 \end{cases}$$

现在令状态 $x_1 = i_1, x_2 = i_2, x_3 = u_c$, 将上式写成矩阵形式即为状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

由于前面已指出电容上的电压 u_c 为输出变量, 故系统的输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

由此可见, 该电路的系统矩阵、控制(输入)矩阵、输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, 图 1.2 所示的 RLC 电路是一个单输入单输出(SISO)网络。此时, 输入矩阵为列向量、输出矩阵为行向量。 x_1, x_2, x_3 分别为电路中的 i_1, i_2, u_c , 由它们确定电路的内部状态。状态方程式的一个解 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 就确定了电路的一个动态过程。由此可见, 向量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 完全描述了该电路内部状态, 故称之为该电路的状态向量, 称 $x_1,$

x_2 、 x_3 为状态变量。由于状态方程是一阶微分方程组，并且该方程组的解由状态的初始值 $x_1(t_0)$ 、 $x_2(t_0)$ 、 $x_3(t_0)$ (即 $i_1(t_0)$ 、 $i_2(t_0)$ 、 $u_c(t_0)$) 和外部输入 u 所唯一确定。换句话说，电路的动态过程由状态的初始值和外加输入唯一确定。另外，在本例中有三个贮能元件，其中两个电感，一个电容，且这三个贮能元件相互独立，因此，该电路的状态变量的维数正好等于独立贮能元件的个数。

[例 1.2] 图 1.3(a) 是一个机械阻尼运动模型，在系统中 M_1 和 M_2 是物体的质量； k_1 和 k_2 是弹簧系数， B_1 和 B_2 是粘性摩擦系数， f 是施加在系统上的外力， y_1 和 y_2 分别表示两个质量离开平衡点的位移。要求写出系统以 f 输入，以 y_1 和 y_2 为输出的状态空间表达式。

[解] 在图 1.3(a) 中，弹簧 k_1 、 k_2 、质量块 M_1 和 M_2 是贮能元件，将弹簧的伸长度即质量块的位移 y_1 、 y_2 和质量块的位移速度 $v_1 = \dot{y}_1$ 、 $v_2 = \dot{y}_2$ 选作状态变量。由于这四个状态变量是相互独立的，因此，可以确定为能描述系统时域行为的一组最小的变量组。为了便于列写系统的运动方程式，先画出系统的隔离体分解图，如图 1.3(b) 所示。根据牛顿第二定律，有

$$Ma = f - f_c$$

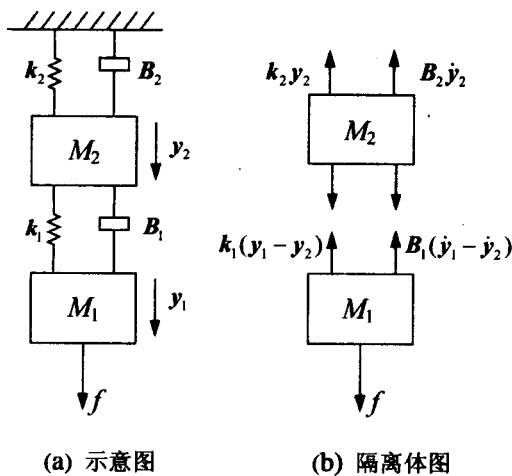


图 1.3 机械阻尼运动模型

式中， M 是质量， a 是加速度， f 是施加在质量块上的外力， f_c 是阻力。从图 1.3(b) 可知，对于质量块 M_1 而言，弹簧 k_1 产生的阻力为 $k_1(y_1 - y_2)$ ，粘性摩擦系数 B_1 产生的阻力为 $B_1(v_1 - v_2)$ ；对于质量块 M_2 而言，弹簧 k_1 产生的力 $k_1(y_1 - y_2)$ 为拉力，粘性摩擦系数 B_1 产生的力 $B_1(v_1 - v_2)$ 也为拉力，而弹簧 k_2 产生的力 $k_2 y_2$ 是阻力， B_2 产生的力 $B_2 v_2$ 也是阻力。据此可以分别写出关于质量块 M_1 和 M_2 位移时力的平衡方程式为

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = f - k_1(y_1 - y_2) - B_1(v_1 - v_2)$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = k_1(y_1 - y_2) + B_1(v_1 - v_2) - k_2 y_2 - B_2 v_2$$

令状态变量 $x_1 = y_1$ ， $x_2 = y_2$ ， $x_3 = \dot{y}_1 = v_1$ ， $x_4 = \dot{y}_2 = v_2$ ， $u = f$ ，经整理可得该机械

阻尼运动系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 + \frac{k_1}{M_1}x_2 - \frac{B_1}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 + \frac{f}{M_1} \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 - \frac{k_1+k_2}{M_2}x_2 + \frac{B_1}{M_2}x_3 - \frac{B_1+B_2}{M_2}x_4 \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{B_1}{M_1} & \frac{B_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1+k_2}{M_2} & \frac{B_1}{M_2} & -\frac{B_1+B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

原题已规定 y_1 (即 x_1)和 y_2 (即 x_2)为系统的输出, 则系统的输出方程可写成

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

例 1.2 是一个单输入(即 $m=1$)、二输出(即 $p=2$)的含有四个状态变量(即 $n=4$)的系统, 输入矩阵 B 为 $n \times m = 4 \times 1$ 维, 系数矩阵 A 为 $n \times n = 4 \times 4$ 维, 输出矩阵 C 为 $p \times n = 2 \times 4$ 维。但要注意, 该系统的状态变量的排序并非唯一, 如果选择 $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1 = v_1$, $x_3 = y_2$, $x_4 = \dot{y}_2 = v_2$, 则系统的 A 、 B 、 C 矩阵的元素会发生变化, 但由于系统的输入、输出和状态变量的个数(即 $m=1$ 、 $p=2$ 和 $n=4$)未变, 因此 A 、 B 、 C 矩阵的维数不会变。

[例 1.3] 直流电机系统如图 1.4 所示, 其中 M 为直流电动机, J 为转动惯量, R 和 L 分别为电机电枢回路的等效电阻和电感, B 为摩擦系数。若以电枢电压 u 为输入, 分三步分别选择不同状态变量, 并以电机角速度 ω 为输出、以转矩 T_e 为输出、以电枢电流 i 同时以转速 n 为输出, 建立系统的状态空间表达式。

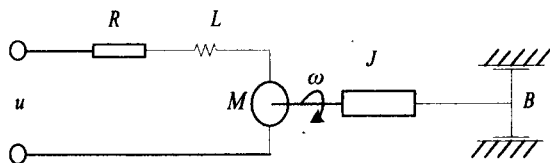


图 1.4 直流电机系统示意图