



东北大学八十周年校庆学术著作

连续体成形力 数学解法

赵德文 著



NEUPRESS
东北大学出版社

东北大学八十周年校庆学术著作

连续体成形力数学解法

赵德文 著

东北大学出版社
· 沈阳 ·

© 赵德文 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

连续体成形力数学解法 / 赵德文著. — 沈阳: 东北大学出版社, 2003. 8
ISBN7-81054-934-0

I. 连… II. 赵… III. 连续介质力学 - 数学方法 IV. O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 077568 号

出版者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024 - 83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024 - 83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress. com

http: // www. neupress. com

印刷者: 沈阳市第六印刷厂

发行者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 170mm × 228mm

印 张: 31.25

字 数: 595 千字

出版时间: 2003 年 8 月第 1 版

印刷时间: 2003 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘淑芳

责任校对: 张淑萍

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定价: 48.00 元

序

连续体成形力学是轧制、锻压、挤压、拉拔等金属成形过程的力学基础，经过 20 世纪 Von. Karman, R. Hill, W. Johnson, B. Avitzur, Г. Я. Гун 和工藤英明、小林史郎等几代大师们的卓越贡献，已经成为一门体系完备、方法独特的科学，在指导金属成形实践和技术进步中发挥了重要作用。

早期人们对材料成形理论的研究，常常是从基本方程出发，附加一些简化假设条件，采用几何近似和物理近似，得到各种成形过程解析解，进而得到力能参数和变形参数。这种努力大约持续了半个多世纪。

20 世纪七八十年代开始计算机在各个领域得到广泛应用，从此以后材料成形理论研究大体可以分为二个途径，一是利用数值分析理论，以计算机为工具、采用有限元和有限差分等方法得到数值解；二是继承前人们的努力，对金属压力加工研究者极具吸引力和挑战性的一些遗留难题开展新一轮的攻坚战，力求得到与那些闪烁着前人们智慧光芒的求解方法和铭刻着先贤名字的经典公式同样辉煌的解析解，这些难题包括：

——1951 年 Hill R 等提出粗糙砧面压缩薄件、厚件等滑移线场，但是此类滑移线场的积分求解问题一直没有得到解决。

——1974 年 小林史郎(Shiro Kobayashi)从速度场出发以里兹法给出了一组求解三维轧制力与宽展的方程，但却没有得到能率泛函整体积分的解析解，只能退而用 Newton - Raphson 法求得数值解。

——1980 年加藤和典(Kazunori KATO)以加权速度场解析三维轧制时，以搜索法得到数值解，同样没有得到能率泛函整体积分的解析解。

——1984 年永井博司(Hiroshi NAGAI)等给出串联式辊拔圆丝简化接触弧方程的近似解，但未能给出真实接触弧方程的直接积分的解析结果。

.....

有了计算机、有限元等数值解法之后,得到上述问题的近似解似乎已经不太困难。对一些常见的工程问题,数值模拟近似解的精度是足够的。从实用主义的角度来说,借助于计算机得到数值解似乎要比那些“咬定青山不放松”——执著于得到解析解的学者来得更为方便和聪明。但是,数值解不能替代深入的理论研究,对材料成形过程本质的深刻理解和对其深层规律的把握,需要解析解。从理论发展的角度来看,数值解是手段,解析解才是目的。面对学科发展中不断出现各类难题的挑战,探求解析解的努力没有止境。

本书作者赵德文教授选择了一条荆棘丛生的艰难之路,他在步入金属压力加工理论研究殿堂之后,以一股契而不舍的韧劲,向前人没有解决的材料成形难题的解析解发起了冲击,以其深厚的数学力学功底和对富有挑战性难题近乎痴迷的热爱,在用连续体成形力学解析轧制、锻压、挤压、拉拔等金属成形过程的努力中取得了一系列令人瞩目的成果,其中有一些为困扰了我们多年的难题找到了答案,例如:

(1) 提出以参量积分、反函数积分方法解决薄、厚件压缩等滑移线场的数值积分问题,1988年、1990年、1993年分别发表在“Applied Math. & Mech.”, “Advanced Technology of Plasticity 1990”, “Chin. J. Met. Sci. Technol.” 以及《Transactions OF NF-socdeng》等杂志上。

(2) 提出不简化接触弧方程串联式辊拔圆丝的解析解,及辊拔力与摩擦系数有关的结论,1992年发表于“中国科学”杂志,1993年全文转载于“Wire Industry International Monthly Journal”上。

(3) 提出以矢量分析法解决不简化接触弧方程的二次曲面成形力能参数解析方法,包括圆、椭圆、双曲线、余弦曲线、抛物线等,1994年,1993年,1995年,1996年分别发表于“Applied Math. & Mech.”, “自然科学进展”, “应用数学学报” “工程力学”, “应用科学学报”及“数学的实践与认识”等杂

志上。

(4) 将双剪应力屈服条件引入金属压力加工, 初步解析了锻造、拔长、拉拔等成形问题。提出采用线性屈服条件对三维轧制能率泛函整体积分线性化的相应方法并在本书中给出解析实例。以上分别在 1990 年, 1991 年, 1993 年, 2002 年发表在“东北工学院学报”, “工程力学”, “东北大学学报”, “Proceedings of International Symposium on Strength Theory 1998”及“The Proceedings of the 2nd International Conference on New Development in Rock Mechanics & Rock Engineering 2002”上。

在解决这些问题的过程中形成了一套以应用数学的特殊积分方法和连续体力学基本原理相结合为主要工具的解法体系, 这些特殊积分包括: 变上限积分、参数积分, 广义积分, 矢量积分等。这些工作有一些曾经受到钱伟长院士的推荐, 与著名力学专家黄文彬教授作过深入的学术探讨, 得到双剪屈服准则创始人俞茂宏教授等的高度评价。

本书的出版, 时逢东北大学建校 80 周年大庆, 是向校庆献礼之作。作为赵德文教授的同事, 我们为本书的出版感到高兴。我们向从事金属压力加工的研究者和教学人员推荐此书, 您将从这本书中领略到材料成形理论的和谐、完美和迷人的风光。

轧制技术及连轧自动化国家重点实验室(东北大学)

王国栋 刘相华

2003 年 8 月

前 言

作者 1970 年留校以来一直从事金属塑性成形力学方面的教学与科研工作,对描述力学现象普遍规律的一些基本原理有些初步认识并对教学中发现的问题产生相应兴趣,应归于受到 Johnson, W., Avitzur, B., Гун, Г. Я. 和 Fung Y. C 等学术思想的启发。钱伟长教授在应用数学和力学杂志上推荐作者的几篇论文及王祖唐、徐秉业、戴天民、俞茂宏教授等曾给予不多的书信鼓励,从作者年轻至今总是在不同时间受到精神推动最大的,甚至得以至今未改初衷,而今母校 80 年校庆,作者继续从事塑性成形力学理论教学与研究工作。

这些描述力学普遍规律的基本原理,与本书相关的应包括:质量守恒、能量守恒、动量与动量矩守恒定律,能量方程、塑性方程、本构方程与热传导方程;相应的数学知识包括普通微积分、矢量分析与张量分析。这是本书前四章基础部分的内容。

描述这些普遍规律的基本原理一般有两种方式:一是对某个系统写出这些原理的积分形式,又称整体原理;再是针对某个质点或微团写出这些原理的微分形式,又称局部原理。塑性加工力学中常见的体积不变方程、平衡方程、剪应力互等定理便是由守恒定律的微分形式转化而来。于是研究这些力学普遍规律的手段也应归结为以下两种基本方法。

解析解法:采用连续统模型 (Continuum model) 及一般原理的积分形式(整体原理),对变形体不进行网格划分,认为相关物理量在变形区整体空间形成有确定值的场。建立场方程并对其进行整体积分,以不同数学积分方法求得能率的解析解。

数值解法:采用离散体模型 (discrete model) 及一般原理微分形式(局部原理),对变形体进行网格划分(离散化),建立单元内相关物理量插值关系,计算单元

能率，再整体求和确定总能率，以不同迭代或摄动使总能率最小化求得数值解。

区别两种解法的标志在于最终的结果，能以解析式描述的，能描绘成连续曲线的结果为解析解。不能以解析式描述的，不能绘成连续曲线（但可描绘成离散点间的折线）的结果为数值解。两种解法是相辅相成的对立统一，缺一不可，不能厚此薄彼，彼此替代。以上是作者一孔之见。近年来随着电子计算机的快速发展，数值解法成为热门话题，在国内外有独占鳌头之势。

与此不同，本书是以数学手段研究解析解法的。重点关注连续介质力学分支—材料成形力学中工程法、滑移线法、极限分析法、变分法等久被冷落的传统领域中开发的新亮点，特别对应用数学和力学方法在连续体成形解析中的新进展情有独钟，这是本书书名的起源与动机，鉴此全书将不包括有限元，上界元，条元等数值解法热门内容。

本书前四章基础部分主要参考了 Гун, Г. Я. 以及汪家才、赵志业等人的著作；后八章应用研究部分主要选自本人在国内外发表的部分相关论文与教学延拓。全书因篇幅所限，未能囊括同行诸多解法上的阳春白雪，仅表歉意。

作者认为，A. A. 马尔科夫 (Марков) 与 R. 希尔 (Hill) 从数学塑性理论角度以完整的形式证明可变形连续介质力学的极值原理以来，连续体成形领域数学解法的相应研究工作是远远不够的。以张量形式表述这些原理，采用较精确的初始和边界条件(包括接触摩擦条件)以及反映实际材料流变特性的变形抗力模型与本构关系求解变形力学方程；研究介质内部的矢量场(应力、位移和应变分布)和标量场(温度、硬度和晶粒度分布等)；研究成形力学中非线性力学与数学问题的线性化方法(塑性功率积分方法线性化、屈服准则线性化等)等；是进一步提高连续体成形力学解析性、严密性与科学性的有效手段。从数学角度看近年来工程研究，本书

无论如何都是数学与工程最紧密结合的产物。

研究工作曾得到辽宁省自然科学基金的资助，对轧制技术国家重点实验室主要合作者王国栋、刘相华教授，早期给予合作与支持的赵志业、张强、白光润教授，东北大学数学系张铁教授、孙艳蕊、李桂范副教授以及辽宁大学数学系刘福林教授，沈阳工业学院数学系方有康教授，沈阳大学铁维麟教授的合作深表谢意。

本书得到东北大学八十周年校庆学术著作出版基金的资助。

本书诸多内容与学术观点难免与传统解法不一。百花齐放，百家争鸣，愿与资深学者各抒己见。至于书中的明显疏漏与本人水平所至谬误，恳请读者批评指正。

著者

2003年5月

目 录

1 矢量分析	1
1.1 场的定义	1
1.2 标量场	2
1.3 矢量场	4
1.4 哈密顿算子与求和约定	11
1.5 拉格朗日与欧拉变量	13
1.6 速度矢量场	19
1.7 势函数与流函数	24
1.8 三维流函数	27
2 张量分析	31
2.1 笛卡儿张量的定义	31
2.2 张量的代数运算	33
2.3 张量的若干特性	35
2.4 各向同性张量	42
2.5 二阶对称张量之间关系	47
2.6 应变张量	51
2.7 应变速率张量	58
2.8 应力张量	62
3 基本定律与本构方程	68
3.1 曲面在介质中的移动和传播	68
3.2 质量守恒定律	69
3.3 动量守恒定律	72
3.4 动量矩守恒定律	74
3.5 能量守恒定律	75
3.6 热传导方程	82

3.7	本构关系规则与介质模型	84
3.8	屈服准则	88
3.9	本构方程	92
3.10	Drucker 公设与最大塑性功原理	101
4	变分法与塑性变分原理	107
4.1	变分特性与泛函极值条件	107
4.2	变分基本引理与欧拉方程	112
4.3	泛函极值问题的直接解法	115
4.4	连续体成形边值问题提法	121
4.5	虚功原理与极值定理	124
4.6	虚速度原理与变分预备定理	128
4.7	连续体的变分原理	133
4.8	刚-塑性材料的变分原理	137
5	连续体成形解法	144
5.1	工程法	144
5.2	平均能量法	147
5.3	滑移线法	148
5.4	极限分析法	157
5.5	变分法与引例	163
5.6	有限元法	167
6	滑移线场参量积分与功率解法	175
6.1	参变量积分的基本概念	175
6.2	薄片滑移线场的参量积分与反函数积分	175
6.3	厚件压缩滑移线场的参量积分	183
6.4	模锻与其他滑移线场的参量积分	188
6.5	滑移线场功率性质的证明与应用	196
6.6	滑移线解与最小上界解一致的证明例	202
6.7	连续速度场求解滑移线场功率	206
6.8	刚性元求解滑移线场功率	213
7	连续体成形力变上限与广义积分	218
7.1	扁带拉拔挤压变上限积分	218

7.2	管材变壁厚空拔的变上限积分	222
7.3	壁厚不变空拔变上限积分及成立条件	227
7.4	冲入无限体矢量分析与广义积分	232
7.5	流函数解析无限体压入	238
7.6	三角形速度场解析辊拔与辊挤	244
7.7	圆形平冲头轴对称冲入无限体	247
7.8	摩擦对无限体冲入力影响的定量分析	252
8	二次曲线模成形的矢量分析解法	257
8.1	椭圆模拉拔挤压的曲线积分	257
8.2	椭圆模轴对称拔制的曲面积分	261
8.3	余弦模挤压拉拔曲线积分	265
8.4	余弦模拔方棒	268
8.5	双曲线模平面变形挤压拉拔	272
8.6	双曲线模轴对称拔制曲面积分	276
8.7	抛物线模(喇叭模)拔制圆棒	280
8.8	抛物线三维模拔制矩形件	284
9	模面函数为圆的二维连续体成形	291
9.1	轧制变形区及相关参数	291
9.2	变形参数 $\bar{\varepsilon}$ 与 $\bar{\varepsilon}$ 的精确计算方法	298
9.3	模面纵剖线为圆的模拔与挤压	306
9.4	两辊串联式辊拔圆丝理论解析	312
9.5	辊拔与辊挤的变上限与参变量积分	317
9.6	板带轧制上界理论解	322
9.7	参变量积分解析孔型轧制矩形厚件	329
9.8	柱坐标连续速度场解析孔型轧制矩形件	333
10	线性屈服准则在成形中应用	339
10.1	线性屈服准则及其塑性功率证明	339
10.2	双剪应力准则解析空心与实心锻造	342
10.3	双剪应力准则解析圆坯拔长	347
10.4	双剪应力准则解析扁料压缩	352
10.5	双剪应力准则解析轴对称冲入	355

10.6	MY 准则及其塑性功率证明	358
10.7	GM 准则及其塑性功率证明	364
10.8	密赛斯准则最大程度线性逼近——MA 屈服准则	372
11	组合解法与一维功率场	380
11.1	摆线与级数组合解析滑移线场	380
11.2	传递与静力微分平衡方程组合解析	382
11.3	滑移线与工程法组合解析冲入	386
11.4	滑移线与上界法组合解析	390
11.5	圆环与圆盘组合解析圆杆冲入	393
11.6	双抛物线组合解析轴对称模拔	397
11.7	一维功率场解析有芯拔管	402
11.8	方棒拉拔一维功率场	408
12	模面函数为圆的三维连续体轧制	413
12.1	三维轧制变形区边值方程与几何参数	413
12.2	三维轧制的连续速度场	417
12.3	三维轧制的矢量分析解法	421
12.4	双剪应力准则解析三维轧制	431
12.5	Karman 假设下三维轧制解析解法	435
12.6	加权速度场析解三维轧制	442
12.7	Kobayashi 宽展函数解析三维轧制	454
12.8	MA 线性屈服准则解析三维轧制	460
12.9	附录	464
	参考文献	479

1 矢量分析

材料成形力学理论是研究材料变形区内各点温度、速度、位移、应变和应力等诸多物理量变化规律的科学。这些量一般都是点的坐标和时间的函数，实际上是在所研究的变形区几何空间形成了上述物理量的场，如应力场、速度场等。也就是说，在变形的某一瞬时，变形区几何空间内某点以上物理量有确定的值相对应。

1.1 场的定义

如果在空间某个区域内定义了某个或某些标量(即数量)函数，则称被定义的区域为标量场。如温度场、势函数与流函数场等。如所定义的函数为矢量(即向量)，则称相应区域为矢量场，如速度场、位移场等。同理，若被定义的函数为张量，则称为张量场，如应力场、应变场、应变速率场等。应指出，对同一区域，由于研究的物理量不同或坐标空间不同，它可能同时被看成标量场、矢量场和张量场。

场内定义的物理量应当是单值、连续、可导的。例如应力和应变对坐标应有连续到二阶、位移和速度应有连续到三阶的偏导数。如果场内定义的物理量在每点不随时间而改变，则称为定常场或稳定场。否则称为非定常场或时变场。把非定常场每一时间间隔 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C$ 看成定常场来研究，即把一个连续变动过程离散为一系列定常过程的总和，可使工程问题得到解决并具有足够的精度。

1.2 标量场

1.2.1 等值面

设标量场内定义的标量函数(称数量函数、纯量函数) φ 连续可导, $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ 。令 φ 等于常数 C , 则得到

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3) = C$$

这是一个空间曲面, 称为标量场的等值面。根据不同的物理意义, φ 可分别为等势面、等温面、流函数等值面等。令 $C = C_1, C_2 \cdots$, 就得到该函数的等值面族。通过空间每一点, 只有一个等值面, 任何两等值面不会相交。等值面族充满了整个空间。对 φ 为二元标量函数时, $\varphi = \varphi(x_1, x_2) = C$ 则是一个以 $x_1 x_2$ 平面为底的物体被平面 $x_3 = \text{常数}$ 截成一系列以封闭曲线为界的平面, 这些封闭曲线在 $x_1 x_2$ 平面上的投影称为等高线, 如图 1.1 所示。如果等高线以相同高度差作出, 即 $C_2 - C_1 = C_3 - C_2 = \cdots$, 则等高线的疏密程度体现了标量函数 φ 的分布特征。沿任何等高线 φ 的切向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0$; 而法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 一般不为零。在

等高线最密处 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 最大, 说明沿等高线法向, 函数 φ 变化最激烈。

三维标量函数等值面可化为二维来研究。例如轧制变形区各点铅直正应力 σ_3 的等值面是 $\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = C$ 。图 1.2 示意地给出了等高线 $\sigma_3(x_1, b, x_3) = C_1$ 的图像; 其中轧辊轴线方向坐标 $x_2 = b$, 故得到平面曲线。要搞清 σ_3 的整个分布, 需将变形区沿宽向截取若干截面, 分别令 $x_2 = b_1, b_2, \cdots$, 即作出的若干个等高线图, 比较后方可得知。上例表明, 尽管 σ_3 是矢量场函数, 但当其方向已确定且不变时, 研究其数值也可按标量函数处理。足见, 对非定常场, 只要相对固定时间 t , 也可作出相应瞬时的等值面或等高线。

1.2.2 方向导数

考察标量函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 沿空间任意方向 S 的变化率即方向导数问

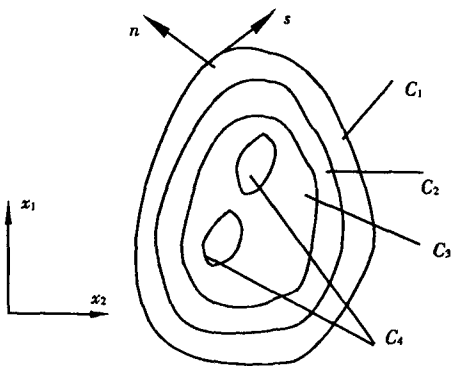


图 1.1 标量场的等高线

题。如图 1.3, 由任意点 M 作空间任意方向直线 S , 在 S 上取 M 的邻近点 M_1 , 且 M 和 M_1 不在同一等值面上, 则下列极限

$$\lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial S}$$

称为 φ 在 M 点的方向导数。一般有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial S} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dS} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dS} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dS} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} l_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} l_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} l_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中 l_1, l_2, l_3 分别为方向直线 S 对坐标轴 x_1, x_2, x_3 夹角的余弦。

也可证明, 若弧长方向与其切线 S 的正向一致如图 1.3, 则 φ 在 M 点对弧长 l 的方向导数等于 φ 在 M 点对 l 的切线 S 的导数, 即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{d\varphi}{dl} \quad (1.2)$$

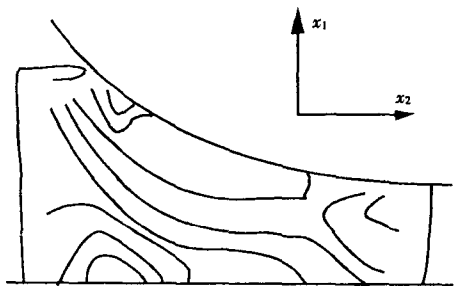


图 1.2 矢量场的分量等高线

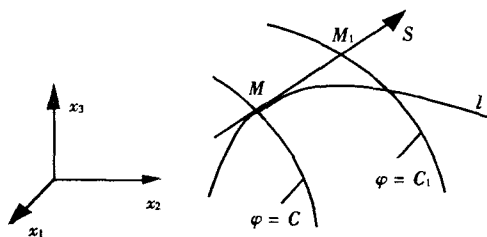


图 1.3 标量场的方向导数

1.2.3 梯度

在标量函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 定义的场内某点的无数个方向导数中, 最大的导数连同其方向称为 φ 在该点的梯度矢量。各点的梯度矢量构成 φ 的梯度场。在图 1.3 中, 过 M 点的任何方向直线 S 取一单位矢量 S^0 , $|S^0| = 1$, 则 S^0 在坐标方向的三个投影正好是方向直线 S 的方向余弦 l_1, l_2, l_3 。故有

$$S^0 = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3 \quad (1.3)$$

式中 e_1, e_2, e_3 是沿坐标轴 x_1, x_2, x_3 方向的单位矢量(固定坐标基)。

设过 M 点有一个矢量 G , 它由下式定义

$$G = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) e_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) e_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) e_3 \quad (1.4)$$

作以上二矢量点积的方向导数式(1.1)

$$S^0 \cdot G = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} l_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} l_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} l_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial S} \quad (1.5)$$

$$S^0 \cdot G = |G| \cos(S^0, G) \quad (1.6)$$

定义式(1.4)的矢量 G 为标量函数 φ 的梯度。它有以下特点。

(1) G 在 S 方向投影即为标量函数 φ 沿方向 S 的方向导数值, 见式(1.5)。该值可由式(1.6)计算, 只要 G 和 S 方向的夹角(S°, G)已知。

(2) 式(1.6)表明任意方向的方向导数值 $S^\circ \cdot G$ 当 G 与 S° 方向重合时极大, 故 $|G|$ 是 M 点的方向导数中数值最大的。

(3) 由几何学知, 等值面 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C$ 法线的方向余弦正是 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$, 式(1.4)表明 G 沿着等值面法向。方向导数最大值等于 $|G|$, $|G| > 0$, 故 G 指向 φ 增大的一方。

以后将梯度矢量记为 $\text{grad } \varphi$, 即

$$\text{grad } \varphi = G = (\partial \varphi / \partial x_1) e_1 + (\partial \varphi / \partial x_2) e_2 + (\partial \varphi / \partial x_3) e_3 \quad (1.7)$$

也可有由等值上一点的法向导数表示梯度, 即

$$\text{grad } \varphi = (\partial \varphi / \partial n) n \quad (1.8)$$

式中 n 是等值面上一点处的法向单位矢量。方向导数为梯度在该方向的投影, 如过某点 S 方向的方向导数为

$$\text{grad } \varphi = \partial \varphi / \partial S \quad (1.9)$$

梯度表示标量函数 φ 代表的物理量在几何空间分布的不均匀程度。例如速度势函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 的梯度是速度场, 即 $v = \text{grad } \varphi$, 或

$$v_1 = \partial \varphi / \partial x_1, v_2 = \partial \varphi / \partial x_2, v_3 = \partial \varphi / \partial x_3 \quad (1.10)$$

1.3 矢量场

1.3.1 矢量线

矢量场是由矢量函数 $a(x_1, x_2, x_3)$ 定义的空间区域, 场中每一点都有一个具有确定大小和方向的矢量 a 。矢量线是一族布满区域的空间曲线, 其上每点处的切线与该点矢量 a 重合, 如图 1.4 所示。空间每点只有一个确定的矢量, 而矢量线上每点只有一条切线, 故两条矢量线不会相交, 如流线、电力线、磁力线等。矢量线 l 上任一点 $M(x_1, x_2, x_3)$ 的矢径 x 为

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$$