開天

王志平　编著

高等数学大讲堂

提高冲刺版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

開天

高等数学大讲堂

提高冲刺版

王志平 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大讲堂·提高冲刺版 / 王志平主编 . —大连:大连理工大学出版社,2004.9(2005.10 重印)
ISBN 7-5611-2649-2

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086917 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
发行:0411-84708842 邮购:0411-84707961 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:16.5 字数:616 千字
印数:12 001 ~ 16 000
2004 年 9 月第 1 版 2005 年 10 月第 3 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:高继巍
封面设计:佟涤菲

定 价:22.00 元

前　言

“怎样学好高等数学?”“如何在短时间内取得最佳的学习效果?”每一个同学都想知道答案,但大多苦苦追寻,而无结果。作者长期从事高等数学的教学与研究工作,通过多年所见所闻,所思所想,深深理解同学们的困惑。借本书出版之际,与大家谈谈这方面的一点心得体会,希望对大家的学习助一臂之力。

要学好高等数学,首先必须掌握基本概念、重要性质、重要结论,在此基础上,熟练地掌握各种常考题型。关键有两点:第一,将课本上的重要概念、性质、结论(课后的某些重要习题也须当作重要结论来记)摘抄下来,进行分类、归纳,找到它们的特征,以及它们之间的联系。第二,对各种常考题型进行分类、归纳,总结出各种题型的特征、适应范围、解题步骤等。

要熟练地掌握上述两点,必须有针对性地做一定量的习题。做什么样的题,做多少?这很重要。做题不在于多而在于精。做题时,首先要简化条件,简化结论;其次要从条件和结论中找到关键的一个,从此入手,找其特征;最后找与此特征类似的重要结论或题型,这样就找到突破口。做题一定要独立思考。有些同学做题时想都不想就看答案,这是很不好的习惯。那么是否就不看答案,一定要独立想出来呢?为了节省时间,这也没有必要。你可以先思考一定时间,如果还做不出来,就看答案,看完后,要分析是什么原因做不出来,然后将整个题记到本子上,并总结:此题用到什么重要结论,关键在什么地方,能否用其他方法解决。只有这样不断总结解题技巧,摸索解题规律,才能真正领悟数学的真谛,提高分析问题解决问题的能力。

俗话说,下棋找高手。为了给你提供一个较高的平台,使你在较短的时间内——

学好、学透、学深高等数学,作者集多年从事高等数学教学与研究生入学考试辅导的经验编写成了本书——《高等数学大讲堂·提高冲刺版》

本书特色

本书根据教育部制定的数学考试大纲的要求,结合同济大学《高等数学》(第四、五版,高教)编写。书中涉及的内容完整,选题典型,类型

齐全，难度适当，对例题解析精辟，推理严谨，条理清晰，技巧性强。

本书内容

本书紧扣教材，按教材章节顺序编排，共 12 章，每章包含六个部分：

一、本章知识脉络图 系统地给出了本章的基本概念、定理、公式等知识结构，使读者对本章的知识点有一个总体的了解。

二、重要结论 言简意赅地总结了必须掌握的核心知识点，并将结论进行分类、归纳。

三、常考题型 详细归纳了考研中出现频率高的题型。针对这些题型，后面的分类剖析中列举了相应的例题进行讲解。

四、预备测试 由于高等数学的抽象性，学生对一些概念的理解不够深刻。为了加深学生对概念本质的正确理解，每章都配有“是非题”，并对“是”、“非”的回答给出了例证说明。针对读者容易忽视或混淆的问题以及解题中出现的错误进行剖析，并指出正确的解题思路。通过“对”与“错”的对比迅速找出自己的薄弱点，以便有的放矢地进行复习。

五、分类剖析 这部分是每章的核心。(1)采用专题与教材体系相结合的方式，对教材的知识进行概括总结，并精选经典例题(含历年考研真题)，进行详细的剖析和解答。(2)结合例题，对解题方法加以分类、归纳、总结并进一步阐明各类解题方法所适用题型及其解题步骤。(3)根据需要，对某些例题随时给出本题所涉及的知识点。以便强化知识点的记忆并灵活运用。(4)对于重要知识点设置了多种例题，编排了充足的题目，以便反复思考，反复训练，以求深刻理解，熟练掌握。此外，对某些例题提供了多种解题思路，以使知识得到融会贯通，活跃思维。

六、真实考场和挑战极限 用考试实战的形式测试并提高学生的应试能力。“真实考场”目的是考察学生对本章基本概念、定理、公式等知识的理解以及掌握程度，与期末考试难度相当；“挑战极限”更多的是一些较难题，综合题，与考研题难度相当。

适用对象

适合于学有余力的本科生阶段复习与期末复习使用，也适合于考研备考学生的复习。

真诚希望本书能陪伴同学们度过一段轻松难忘的学习时光，能够迅速提高自己的学习水平，取得优异的成绩。

作者

2004 年 8 月

目　录

第一章 函数与极限

本章知识脉络图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义
      - 定义域
      - 对应法则
    - 性质
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 常见函数
      - 初等函数
      - 分段函数
      - 复合函数
  - 极限
    - 数列极限（ε-N 定义）
      - 有关系式（用单调有界数列来证极限存在）
      - 没有关系式
        - 单个数列（用重要极限或转化为函数极限）
        - 数列之和极限
          - 夹逼定理
          - 定积分定义
    - 函数极限（ε-δ 定义）
      - 极限存在的充要条件
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
      - 无穷小（大）量
        - 定义
        - 阶的分类
          - 高阶
          - 等价
          - 同阶
          - k 阶
      - 求极限的方法
  - 连续
    - 连续函数的性质
      - 初等函数的连续性
      - 闭区间上连续函数的性质
    - 间断点
      - 第一类
        - 可去
        - 跳跃
      - 第二类
        - 无穷型
        - 震荡型

重要结论

1 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1} \Leftrightarrow \{a_n\}$ 的所有子数列 $\{a_{n_k}\}\to a, k\to\infty$

2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0) \Leftrightarrow \forall a_n\to x_0(a_n\neq x_0), f(a_n)\to A(n\to\infty)$

3 **函数极限的保号性(函数与其极限值之间的不等关系)**

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $A>B$,则 $\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $A\geqslant B$。

4 **等价无穷小代换**

$f(x)\to 0(x\to x_0$ 时),有

$\sin f(x)\sim f(x)\sim \arcsin f(x)\sim \tan f(x)\sim \arctan f(x)\sim e^{f(x)}-1\sim \ln(1+f(x))$。

$a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a, 1-\cos f(x)\sim \frac{1}{2}f^2(x), (1+f(x))^\mu-1\sim \mu f(x)$。

5 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \quad \begin{cases}\dfrac{0}{0}\\[2mm] \dfrac{\sin\square}{\square}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e \quad \begin{cases}1^\infty\\ \text{底数中要转化为有“1”的形式}\\ \text{1 后面的项与指数的乘积等于 1}\end{cases}$$

6 **无穷小的性质**

(1) 有穷个无穷小的和、差、积仍为无穷小;

(2) 有界函数与无穷小之积仍为无穷小;

(3) 如 $f(x)\to 0(x\to x_0)(f(x)\neq 0)$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大,反过来也成立。

7 **有关系式时,可使用下列结论:**

单调增有上界的数列必有极限；单调减有下界的数列必有极限。

8 两边夹法则

(1) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n (n \geqslant N)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

(2) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) (x \in \mathring{U}(x_0, \delta))$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

9 分段函数分段点处的连续性

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$

10 间断点的类型

第一类($f(x_0 - 0)$，$f(x_0 + 0)$ 都存在)

(1) $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$，$x_0$ 为跳跃间断点；

(2) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$（或 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$，但 $f(x)$ 在 x_0 没有定义），则 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点。

第二类($f(x_0 - 0)$，$f(x_0 + 0)$ 至少有一个不存在)

(1) 如 $f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0) \to \infty$，则 x_0 称为无穷型间断点

(2) 如 $f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0)$ 不趋近于 ∞，也不趋近于任何有限值，则 x_0 称为震荡型间断点

11 连续函数的反函数、复合函数也连续，一切初等函数在定义区间内都连续

12 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性　　(2) 最值性　　(3) 介值性

常考题型

- 函数
  - 求函数的定义域
  - 求函数值或函数表达式
  - 判别函数奇偶性
  - 判断函数的单调性
  - 判断函数的周期性
- 极限（重点）
  - 利用化简来求（分子有理化、分母有理化、恒等变形、分解）
  - 利用两个重要极限
  - 利用无穷小量的性质
  - 利用洛必达法则
  - 利用 Taylor 公式
  - 利用函数极限与数列极限的关系
  - 利用函数极限存在的充要条件
  - 利用单调有界法则
  - 利用两边夹法则
  - 利用定积分定义
  - 利用级数收敛的必要条件
  - 确定极限中的常数
- 连续
  - 函数间断点的类型
  - 利用连续性，求表达式中的常数

预备测试

判断下列作法及结论是否正确。

1.“有两个变量，一个在变，另一个也变，它们就构成函数关系。”

2. 分段函数是初等函数。

3. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的“ε-δ”定义中，ε 是 δ 的函数？

4. 无界函数就是无穷大量。

5. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则必存在一个关于 x_0 的很小的邻域，在此邻域内 $f(x)$ 连续。

6. 初等函数在定义域上连续。

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}$。

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

8. 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

9. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}}$

$$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}} = 1$$

10. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^{-\frac{1}{2x}}}{1-e^{-\frac{1}{2x}}} = 1$

12. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1+2x_n (n = 1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对 $x_{n+1} = 1+2x_n$ 两边取极限，得 $a = 1+2a$，于是 $a = -1$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$。

预备测试参考答案

1. 不对，这种说法不确切。两个变量之间是否构成函数关系，不在于一个变化引起另一个变化，而在于是否存在一法则，使一个变量在其取值范围内任取一值时，另一个变量总有确定的值与之对应。一个变，另一个也变，未必构成函数关系。如，在极限“ε - δ”定义中，一般ε变化时，δ也相应地变化，但δ不是ε的函数；再如，$f(x) = 1$，一个在变，另一个不变，却构成函数关系。

函数记号 $f(x)$ 中的字母“f”表示 y 与 x 的对应法则，一般指对 x 施加的运算。例如，$f(x) = \cos(2x+1)$，这里“f”表示对给定的 x 值先乘上 2，再加上 1，最后取余弦值的运算过程。

2. 分段函数一般不是初等函数。初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及复合运算所得的，并能用一个式子表示的函数，而分段函数在自变量的不同变化范围中，对应的法则用不同的式子表示。所以，一般分段函数不是初等函数。

但是，有些分段函数也可用一个式子表达。如 $f(x)=|x|$ 通常写成分段函数的形式：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}=\sqrt{x^2}\text{，因此 } f(x)=|x| \text{ 是初等函数。}$$

虽然有些分段函数是初等函数，但把它们写成一个表达式无助于讨论其性质。因此，对于分段函数，除特殊情况外，通常没有必要判断其是否为初等函数，而把它当作非初等函数。

因此，分段函数一般不是初等函数。

3. ε 具有任意性与相对固定性。在没取定 ε 以前，ε 可为任意正数，这保证了 $f(x)$ 与 A 可以无限接近。ε 一旦取定以后，就应暂时固定，以便由它来找 δ。"ε-δ"定义正是借助于 ε 与 δ 的引入，才能够使用精确化的定量方法描述 x 与 x_0 无限接近时，函数 $f(x)$ 与 A 无限接近的事实。

δ 不是 ε 的函数，因为 δ 不是由 ε 惟一确定的，即对于给定的 ε，若存在一个满足要求的 δ，则必然有无限多个满足要求的 δ。如若 $\delta=\varepsilon/2$，则 δ 可取 $\varepsilon/3,\varepsilon/4,\cdots,\varepsilon/n(n>2)$。

4. 此说法不对，无界是就某区间而言函数的一种取值特性，无穷大量是指 $x\to\infty(x\to x_0)$ 时，函数的一种变化性态。如 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界是指对任何正数 M 总至少存在一点 $x_1\in(0,+\infty)$，使 $|f(x_1)|>M$；而 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大是指对任意给定的正数 M，总存在正数 X，使当 $x>X$ 时的一切 x，恒有 $|f(x)|>M$ 成立。

例如，$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但 $x\to+\infty$ 时不是无穷大。事实上，$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$。可见，无论给定多么大的正数 M，当 n 充分大时，总会有使 $|f(x_n)|>M$ 的点 x_n 存在，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界。另取 $x_n'=2n\pi$，$f(x_n')=0$。可见，无论 x 取多大的值，总有 $x_n'>X$ 使 $f(x_n')=0$，即对于任意给定的正数 M，当 $x>X$ 时，使 $|f(x)|>M$ 恒成立的点 X 不存在，故 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大。

5. 不正确。如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数}\\ -x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$，

$$0\leqslant|f(x)|=|x|\to 0(x\to 0)$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但除 $x=0$ 外，处处间断。

6. 基本初等函数在定义域上是连续的，但初等函数在定义域的某点上不一定连续。例如初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$，它的定义域 $D=\{x\mid x=2k\pi,k\text{ 为整数}\}$ 中的每一点都是孤立点。由于函数在定义域的孤立点的邻近无定义，因而不能讨论函数在该点的连续性。

但是，如初等函数 $f(x)$ 的定义域 D 内的某点属于 D 内某一区间（即该点属

于 $f(x)$ 的某一定义区间),那么 $f(x)$ 在该点必定连续。因此说初等函数在其定义区间上连续。

7. 分析 这里推演的第一步应用了等价无穷小代换 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}$ $(x\to 0)$,这是错误的。因为这里忽略了无穷小量 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 作比较时的前提条件,即分母 $\beta(x)$ 不能等于零,这里 $\beta(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$。当 x 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$(n 为正整数)时,$\beta(x_n)=\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi=0$。

解 当 $x\neq 0$ 时

$$\left|\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant x^2$$

所以
$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant|x|\to 0(x\to 0)$$

从而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0$$

8. 分析 第二个等号不成立,重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式。但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ 却不是未定式。当 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x}\to\infty$,而 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界,故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0$。

解 因为 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $\sin\frac{1}{x}$ 有界;而 $x\to 0$ 时,x 是无穷小。所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$(有界函数与无穷小的乘积是无穷小)。

9. 分析 第二个等号不成立。犯了求极限优先的错误,求极限时,不能先对一些表达式求,后对另一些表达式求。

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}}$

其中
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0$$

故
$$原式=1$$

10. 分析 第一个等号不成立,在求极限时,可将有些函数用等价无穷小代

换，但代换仅限于乘积或商的形式。对于和或差的某一项一般不能用等价无穷小代换。

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1-1=0$。

11. 分析 第二个等式不成立，因为 $x\to0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$x\to0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to0$。

解
$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+e^{-\frac{2}{x}}}{1-e^{\frac{-2}{x}}}=1$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}+1}{e^{\frac{2}{x}}-1}=-1$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ 不存在。

12. 分析 $x_1=1,x_2=3,x_3=7$。可见 $x_n>1(n>1)$。由极限的保号性，应有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant1$。显然，上述结论是错误的。

错误的原因在于没有理解"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"的涵义。"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"有两层涵义：① 数列 x_n 收敛；② x_n 的极限是 a。因此在求极限之前，先应判断所求极限的存在性。

解 因为
$$\begin{aligned}x_n&=1+2x_{n-1}=1+2(1+2x_{n-2})=\cdots\\&=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$
所以 $\{x_n\}$ 单调增且无上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。

分类剖析

1 有关函数的题型

求函数的定义域

一般应求使函数有意义的 x 的范围，例如

$y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\neq0$

$y=\sqrt[n]{\varphi(x)}$，n 为偶数，则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\geqslant0$

$y=\log_a\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 应满足 $\varphi(x)>0$

$y=\arcsin\varphi(x)$，或 $y=\arccos\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 应满足 $|\varphi(x)|\leqslant1$

求复合函数的定义域

1° 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域。此种题型只要解 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 即可。

2° 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，$f(x)=\begin{cases}h_1(x),a\leqslant x\leqslant c\\h_2(x),c\leqslant x\leqslant b\end{cases}$，求 $f[g(x)]$ 的定义域。此种题型只要令 $g(x)=u$，求出 $f[g(x)]$ 中的 x 范围即可。

【例 1】 求函数 $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$ 的定义域。

解 $1-2x\geqslant 0$，$\left|\frac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1$，解得

$$x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$$

【例 2】 设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，试求下列函数定义域：

(1)$y=f(x^2)$；　　(2)$y=f(\tan x)$。

分析 依据复合函数的定义，第二个函数的值域一定要在第一个函数的定义域内。

解 (1)$0\leqslant x^2\leqslant 1$，定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$。

(2)$0\leqslant \tan x\leqslant 1$，定义域为

$$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求下列函数的定义域：

(1)$f(2x)$；　　(2)$f(x-1)$。

分析 这是关于分段函数的复合函数求定义域的问题，此类问题必须先求出函数的表达式，再求其定义域。

解 (1) 令 $2x=u$，则

$$f(2x)=f(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 1\\ 0, & 1<u\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ 0, & 1<2x\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

定义域为$[0,1]$。

(2) 令 $x-1=u$，则

$$f(x-1)=f(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 1\\ 0, & 1<u\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

定义域为$[1,3]$。

求函数值或已知函数关系求函数 $f(x)$ 的表达式

1° 已知 $f(x)$，$g(x)$，求 $f[g(x)]$。

如 $f(x)$，$g(x)$ 为非分段函数，则将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 代，再将 $g(x)$ 写出具体函数。如 $f(x)$，$g(x)$ 为分段函数或至少有一个为分段函数，则将 $f(x)$ 中的每一分段支用 $g(x)$ 代即可。

2° 已知 $f[g(x)]=h(x)$，求 $f(x)$。

令 $g(x)=u$，求出 $x=g^{-1}(u)$ 代到 $h(x)$ 中，得 $f(u)=h[g^{-1}(u)]$ 再将 u 换成 x 即可，或将 $h(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$ 的形式也可得出 $f(x)$ 的表达式。

【例 4】 设 $f(x)=\cos(x^2+1)$，求 $f[f(x)]$。

分析 据复合函数定义，将 $f(x)$ 代入到 $f[f(x)]$ 中，然后求出 $f[f(x)]$。

解
$$\begin{aligned} f[f(x)] &= \cos[f^2(x)+1] \\ &= \cos[\cos^2(x^2+1)+1] \end{aligned}$$

【例 5】 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

分析 解此类题的一般方法是令 $f[\varphi(x)]$ 中的 $\varphi(x)$ 等于 t，由 $t=\varphi(x)$ 解出 x 代入原式，再由函数与变量记号无关性得到 $f(x)$。

解 令 $x+\dfrac{1}{x}=t$，则 $t^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，代入原式得 $f(t)=t^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$。

【例 6】 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1 \\ 2, & |x|>1\end{cases}$。

求：(1) $\varphi[\varphi(x)]$；　(2) $\varphi[\psi(x)]$；　(3) $\psi[\varphi(x)]$；　(4) $\psi[\psi(x)]$。

分析 利用复合函数的定义，求出每一个函数。

解 (1) 因为对任何 x 都有 $|\varphi(x)|\leqslant 1$

所以
$$\varphi[\varphi(x)]=1 \quad (-\infty<x<+\infty)$$

(2) 由于当 $|x|<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2>1$，从而 $\varphi[\psi(x)]=0$；当 $|x|>1$ 时，$\psi(x)=2>1$，从而 $\varphi[\psi(x)]=0$；当 $|x|=1$ 时，$\psi(x)=2-1^2=1$，从而 $\varphi[\psi(x)]=1$，所以有
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1 \\ 1, & |x|=1\end{cases}$$

(3) 因为对任何 x 都有 $|\varphi(x)|\leqslant 1$，故有
$$\psi[\varphi(x)]=2-\varphi^2(x)=\begin{cases}2-1, & |x|\leqslant 1 \\ 2-0, & |x|>1\end{cases}$$

即
$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1 \\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

(4) 由于 $|x|<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2>1$，从而 $\psi[\psi(x)]=2$，$|x|>1$ 时，$\psi(x)=2$，$\psi(\psi(x))=2$，$|x|=1$ 时 $\psi(x)=2-1^2=1$，从而 $\psi[\psi(x)]=2-1^2=1$，所以有
$$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}2, & |x|\neq 1 \\ 1, & |x|=1\end{cases}$$

【例 7】 (880105) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$