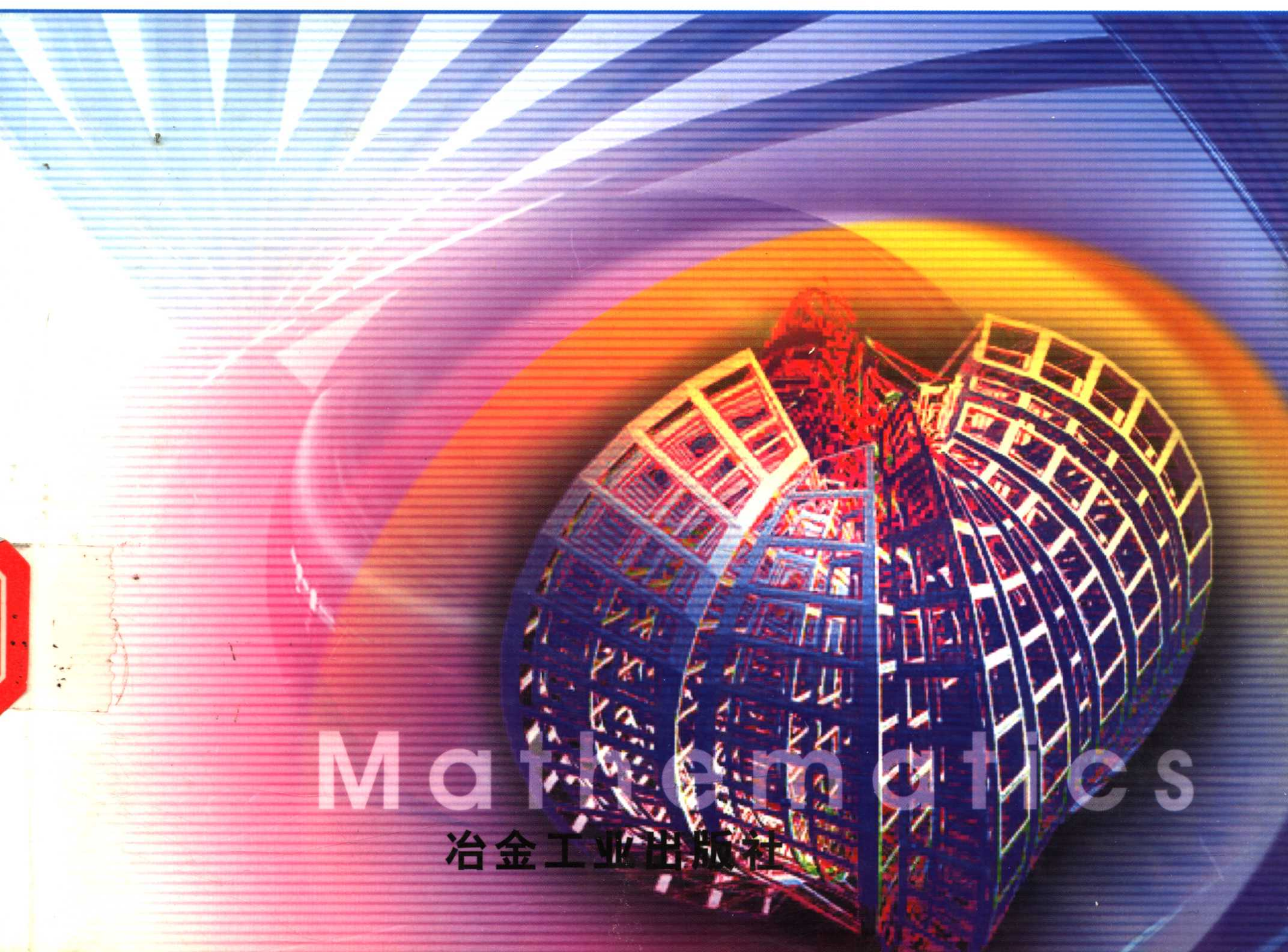
高等学校21世纪计算机教材

离散数学

黄志洪　编著



冶金工业出版社

高等学校21世纪计算机教材

离散数学

黄志洪　编著

北　京

冶金工业出版社

2003

内 容 简 介

离散数学是一门与计算机联系较密切的数学。随着计算机技术突飞猛进地发展，离散数学在数学中的地位也越来越重要。“离散数学”课程是计算机专业的一门核心课程，也是很多高校招收计算机专业研究生考试的科目之一。

本书内容广泛，包括数理逻辑、集合论、图论以及代数系统等离散数学的理论基础知识，在理论基础方面介绍了一些与计算机技术联系比较密切并广泛应用的内容，如同余应用、逻辑门电路、最短路径理论等。本书在编写的过程中尽量地把离散数学的各个部分有机地结合起来，力求做到内容深入浅出，通俗易懂，条理清晰。

本书适合于数学、计算机科学和工程技术专业人员使用，也可作为高等院校离散数学的教学用书，还可供计算机软件水平考试者和参加计算机等级考试者参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 黄志洪编著. —北京：冶金工业出版社，2003.6

ISBN 7-5024-3274-4

I. 离… II. 黄… III. 离散数学 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 034707 号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）

责任编辑 戈兰

中山市新华印刷厂有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2003 年 9 月第 1 版，2003 年 9 月第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16； 24.25 印张； 593 千字； 380 页； 1–5000 册

39.00 元

冶金工业出版社发行部 电话：（010）64044283 **传真**：（010）64027893

冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号（100711） **电话**：（010）65289081

（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

一、关于离散数学

离散数学是一门数学，它是以数学为基础，被应用于计算机及其相关专业的一门综合性学科。为了更好的学习计算机及其相关专业的内容，不仅要求大学生、工程技术人员、科研人员等具有良好的计算机编程及应用能力，更重要的是打好学习计算机及其相关内容的基础——离散数学，使数学的逻辑性、思路严密性被较好的融入到计算机应用中。

二、本书编写原则

在编写本书时，为了达到最佳效果，力图将离散数学中的各个部分有机地结合起来，同时，尽量将各个部分的特色通过浅显易懂的方式表达出来。为了突出离散数学是一门数学的基本概念，本书力求叙述严格，证明与逻辑性强，思路清晰，使学生通过本书的学习后，不仅能有良好的计算机数学基础，还能得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练。由于考虑到离散数学这一课程主要为计算机及其相关专业的学生所开，因此编写本书时，还力求做到能够密切结合计算机的实际应用，将理论与实际紧密结合起来，使读者知道如何利用离散数学的理论去解决计算机中的实际问题。

本书的读者应该具有初等的数学知识，而且具有一定的逻辑思维能力。

三、本书结构安排

本书共分为 10 章，内容安排如下：

第 1 章：数理逻辑基础。主要介绍了命题、命题公式与翻译、命题等价、命题逻辑的范式、谓词和量词、谓词公式与翻译、自由变元和约束变元、谓词逻辑中的永真式、谓词逻辑中的范式等内容。

第 2 章：集合。首先对集合进行了概述，接着介绍了集合的运算、集合运算定律、笛卡尔乘积、集合在计算机中的表示等内容。

第 3 章：关系。主要介绍了关系的基础知识、关系的运算、关系的闭包运算、等价关系、相容关系、偏序等内容。

第 4 章：函数。主要介绍了函数基础知识、复合函数、反函数、集合的基数等内容。

第 5 章：数学推理。主要介绍了推理规则、证明定理的方法、数学归纳法、递归的定义方法等内容。

第 6 章：组合数学。主要介绍了基本计数原则、鸽巢定理、排列与组合、二项式定理与组合等式、离散概率、递推关系、生成函数等内容。

第 7 章：基础代数。主要介绍了整数和除法的概念及其基本应用、数论的应用、矩阵、群等内容。

第 8 章：布尔代数与逻辑电路。主要介绍了布尔函数、布尔函数的表示、逻辑门电路、电路的极小化等内容。

第 9 章：图论。主要介绍了图的基础知识、通路与回路、平面图与图着色、树、树的遍

历与排序、生成树等内容。

第 10 章：离散数学在计算机中的应用。主要介绍了离散数学在编译器构造中的应用、离散数学在关系数据库中的应用，最后通过实例介绍了 Huffman 压缩算法和网络流。

四、本书特点

本书内容丰富，通俗易懂，条理清晰，将离散数学与计算机实现紧密结合在一起，使读者不仅能够掌握离散数学各基本部分的数学定义、定理及其主要内容，还能在计算机上应用已经掌握的编程工具来实现这些内容。具体地说，本书将一些具体的实现例子与内容已经放到例题与习题中，读者可逐一验证。

在本书每章的末尾都附有一定量的习题，读者可及时检测自己的学习情况。本书的最后给出了习题的参考答案，读者可按提示更好的理解和在计算机上掌握离散数学。

五、本书使用对象

本书适合于数学、计算机科学和工程技术专业人员使用，同样也可作为高等院校离散数学的教学用书，还可供计算机软件水平考试者和参加计算机等级考试者参考。

本书在编写过程中，得到了陈婉清、杨妮芳、边一斐、谢家慧等的大力帮助，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促，水平所限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者给予批评指正。

读者在阅读本书的过程中，如果有好的意见或建议，可以发 E-mail 到 service@cnbook.net，也可登录网站：http://www.cnbook.net，在该网站的相关论坛进行讨论。

编　者

2003 年 6 月

目　录

第 1 章　数理逻辑基础

本章提要

- *命题逻辑的基础知识*
- *谓词逻辑的基础知识*

数理逻辑主要是研究推理的科学。数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物，运用数学方法研究思维形式和规律，特别是研究数学中的思维形式和规律。所谓的数学方法主要是指采用数学符号化的方法，给出推理规则来建立推理体系，使得对形式逻辑的研究归结为对由一整套符号所组成的推理体系的研究。命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的基本组成部分，是其他分支的共同基础。本章主要介绍命题逻辑和谓词逻辑的基础内容。

1.1　命题

命题逻辑也称为命题演算。同时命题逻辑又是谓词逻辑的基础，它主要研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。因此我们先从命题开始讨论。

1.1.1　命题的概念

“命题”是数理逻辑的最基本概念。凡是能分辨其真假值的语句都叫做命题。进一步，命题可以理解为一个具有真假值的陈述句，因为在语言中，一般只有陈述句才可以分辨其真假值。如：

例 1-1：考虑下列语句：

（1）北京是中国的首都。

（2）今天下雪。

（3）$1+1=3$。

（4）地球比太阳大。

语句（1）～（4）都是具有真假值的陈述句，故都是命题。其中（1）、（2）具有真值，是真命题，（3）、（4）具有假值，是假命题。

命题必须具有真假值，从某种意义上来说，疑问句、祈使句、感叹句等均不能分辨其真假值，所以都不是命题。例如：“天气真好啊！”“你在哪里？”“滚出去！”均无法分辨其真假。但是，也并不是所有的陈述句都是命题，所以在分辨一个陈述句是否具有真假值的时候应该注意下面几点：

（1）产生词义上的悖论的陈述句不是命题。例如语句“我说的话是假的”。如果我们假设这个语句是真的，但此时语句本身却指明为假；反过来，如果我们假设它为假，则此时意味着这语句的否定为真，也就是说这个语句是真的。这就产生了一个词义上的悖论，从而我们无法判断这个语句的真假，所以这个语句不是一个命题。

（2）有时候一个陈述句的真假与判断标准，语句所处的环境、人的主观因素、认识程度等有密切的联系。

例如“这部电影不好看”，这是一个命题，虽然这个语句的真假似乎不能惟一的确定，因为它是因人而异，它的真假取决于说话人的主观判断。

又如“1+1 = 10”，这也是一个命题，当然，当它表示的数为二进制时，此命题语句是真的，但如果它表示的数为十进制和其他进位制时此语句就是假的了；但在实际中我们一定可以根据上下文的关系立即确定它表示的数是二进制还是非二进制数（确定判断标准），所以这个语句是能分辨真假的。

（3）能判断真假，并不意味着现在就能确定其是真还是假，只要它具有能够惟一确定的真假值即可。所以即使有些陈述句当前还不能知道是真是假，但在将来一定能知道它的真假，这些都是命题。

例如下述陈述句是命题：

（1）明年的中秋节的晚上是晴天。

（2）地球外的星球上存在生物。

（3）21 世纪末，人类将居住在太空。

（4）哥德巴赫猜想是正确的。

我们要把“已知其真假”和“其本身能分真假”区分开来，只要能分真假的语句均可以认为是命题。

经典命题逻辑不区分现在已确定为真，还是将来可能确定为真这种情况，处理与时间有关的真值问题是时态逻辑的任务。经典命题逻辑也不区分是在技术上可以确定为真，还是现在的技术条件下不可以确定为真的这种情况，只承认在技术上，或者说能给出某种方法确定为真的那些东西才为真是直觉逻辑的观点。

命题常用字母表示，我们一般用 P，Q，R，S……等大写字母或 p、q、r……等小写字母表示命题。如果一个命题是真命题，它的真值为真，用 T 表示；如果它是假命题，其真值为假，用 F 表示。所有命题都具有确定的真值。

例 1-2：命题必须为陈述句，不能为疑问句、祈使句、感叹句等，试判断下列句子哪些是命题。

（1）3 是有理数。

（2）8 小于 10。

（3）2 是素数。

（4）乌鸦是黑色的。

（5）这个小男孩多勇敢啊！

（6）乌鸦是黑色的吗？

（7）但愿中国队能取胜。

（8）请把门开一开！

（9）$x+y>10$。

（10）我正在撒谎。

解：句子（1）、（2）、（3）、（4）是命题。

句子（5）、（6）、（7）、（8）不是命题。

句子（9）、（10）不可能判断其为真或为假，所以也不是命题。

一个陈述句如果不能再进一步分解成更为简单的陈述子句，而且又是一个命题，则此命

题叫原子命题。

1.1.2　命题联结词

在日常语言中，往往有这样的情况，叙述一个事实或一个事件，要用两个以上的陈述句来叙述。

例如，“星期天，我去郊游，或者去看电影”，“老师在讲课，同学们在认真地听讲”，“如果你不看电影，那么我也不看电影”。以上这些由一些简单的陈述句，通过一些“联结词”构成的较为复杂的语句叫做复合语句。

这种陈述句的复合是命题的复合。由原子命题通过特定的“联结词”可构成复合命题。原子命题和复合命题是命题的两种类型。显然，由一个或多个命题通过“联结词”所构成的仍然是命题。

在日常语言中联结词可以是“不”，“并且”，“或者”，“如果……则……”，“当且仅当”等等，在命题逻辑中我们定义类似于日常语言中的一些联结词，称为命题联结词，我们在使用这些联结词时用真值表对它们做出严格定义，使其含意清楚准确，不会产生歧义。

下面主要讲述常用的命题联结词：

定义 1-1： 令 P 为一命题，则语句“非 P 所说的情形”是另一个命题，称为 P 的否定。P 的否定用¬P 表示。命题¬P 读做“非 P”。

例 1-3： 找出命题“他是小王。”的否定，并用中文表示。

解：否定为：

“并非他是小王。”

也可以更简单地表达为：

“他不是小王。”

命题真值之间的关系可以用真值表给出。在确定由比较简单命题组成的命题之真值时，真值表特别有用。表 1-1 所示给出了命题及其否定所有可能的真值。

表 1-1　命题及其否定真值表

P	¬P
T	F
F	T

命题的否定也可以看作“非”联结词作用在命题上的结果。“非”联结词从一个已有的命题构造出一个新命题。

定义 1-2： 令 P 和 Q 为命题。命题“P 而且 Q”是这样一个命题：当 P 和 Q 均为真时它为真，否则为假，用 P∧Q 表示。命题 P∧Q 称为 P 和 Q 的合取。

表 1-2 所示给出了 P∧Q 的合取真值表，列出了命题 P 和 Q 真值的各种组合。

表 1-2　两命题合取的真值表

P	Q	P∧Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 1-4：找出命题 P 和 Q 的合取，其中 P 为命题“小王的成绩很好”，Q 为命题“小王乐于帮助别人”。

解：这两个命题的合取 $P \wedge Q$ 是命题“小王的成绩很好而且乐于帮助别人”。

定义 1-3：令 P 和 Q 为命题，命题“P 或 Q”是这样一个命题：它的真值在 P 或 Q 均为假时为假，否则为真，用 $P \vee Q$ 表示。命题 $P \vee Q$ 称为 P 和 Q 的析取。

“$P \vee Q$”也可叫 P 与 Q 的析取式，而 P、Q 分别叫它的析取项，它的真值表如表 1-3 所示。析取所含两命题之一成真和两者均成真时，析取的真值为真。

表 1-3　两命题析取的真值表

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

值得注意的是联结词“或”在析取中的使用是对应于“或”包含的两种情形之一，即“同或”，而不是“异或”。

例如：

“已通过大学英语六级考试或 BEC 二级考试的学生可以选修这门课。”

这里的“或”是以“同或”的方式使用的，即通过了大学英语六级考试和 BEC 二级考试的学生以及只通过了其中的一种考试（六级或 BEC 二级）的学生都可以选修这门课。另一方面，当我们说：“已通过大学英语六级考试或 BEC 二级考试，但不是两种考试都通过的学生，可以选修这门课”的时候，使用的“或”是“异或”。这里的意思是既通过了大学英语六级考试，又通过了 BEC 二级考试的学生不能选修这门课；只有那些恰好只通过了其中一门考试的学生可以选修这门课。

所以我们将有下面的“异或”定义：

定义 1-4：令 P 和 Q 为命题。用 $P \oplus Q$ 表示 P 和 Q 的异或是这样的一个命题：当 P 和 Q 中恰有一个为真时它为真。

这里的“或”就是以“异或”的方式使用，此时用异或来联结命题 P 和 Q 同样可得到命题“P 或 Q”，这一命题当 P 为真且 Q 为假时为真，或者反过来当 P 为假且 Q 为真时为真；P 和 Q 两者同时为假和同时为真时，这一命题为假。

两个命题异或的真值表，如表 1-4 所示。

表 1-4　两命题异或的真值表

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

定义 1-5：令 P 和 Q 为命题。蕴涵 $P \to Q$ 是这样一个命题：当且仅当 P 为真，Q 为假时，$P \to Q$ 为假，否则为真。其中 P 称为 $P \to Q$ 的假设（或前提、前项），Q 称为 $P \to Q$ 的结论（或后果）。

表 1-5 所示是蕴涵 P→Q 的真值关系。

表 1-5　蕴涵 P→Q 的真值表

P	Q	P→Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

数学推理中的“如果 P，则 Q”、“如果 P，Q”、“就 Q 仅当 P”、“Q 如果 P”、“只要 P，Q”等术语都出现了蕴涵。

值得注意的是，因为只有在 P 为真而 Q 为假时 P→Q 才为假，所以当 P 和 Q 均为真，或 P 为假（无论 Q 是真是假）时，P→Q 的真值为真。

此处定义的蕴涵比日常语言中的蕴涵含义要广泛一些。

对于严格定义的蕴涵 P→Q 只要 P、Q 能够分别确定其具体的真值 P→Q 即成为命题。而在日常语言中，对“如果…、则…”这样的语句，当前提为假时，结论不管是真是假，这个语句的意义往往是无法判别其真假值的，但在定义的蕴涵 P→Q 中，都规定当假设 P 为假时，无论 Q 是真是假时，P→Q 的真值都为真。

例如：

“如果今天晚上下雨，那么我将留在家里。”

这是一个有因果关系的命题，也是日常语言中的蕴涵，而且除了今天晚上的确下雨但我又不留在家里时，上述蕴涵命题 P→Q 的值为假，否则上述蕴涵总是为真。

但是，对于蕴涵语句“如果今天晚上下雨，那么 1+1 = 1”，根据蕴涵命题的定义，此蕴涵语句除了今天晚上的确下雨外都为真，尽管 1+1 = 1 为假。

这就是体现我们考虑的蕴涵命题比语言中使用的要广泛的一个例子。蕴涵作为一个数学概念不依赖于假设和结论之间的因果关系。我们定义蕴涵的时候规定了它的真值，而这个定义不是以语言的用法为基础的。

我们定义命题 Q→P 为 P→Q 的逆蕴涵。

定义 1-6：令 P 和 Q 为命题。双蕴涵 P↔Q 是这样的一个命题：当且仅当 P 和 Q 有同样的真值时，P↔Q 的真值为真，否则为假。

P↔Q 的真值如表 1-6 所示。

表 1-6　双蕴涵 P↔Q 的真值表

P	Q	P↔Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

常用“P 是 Q 充分必要条件”“如果 P，那么 Q；反之亦然”“P 当且仅当 Q”等术语来表示这一双蕴涵 P↔Q。

例 1-5：命题 P 为“四边形 ABCD 是平行四边形”，Q 为“四边形 ABCD 的对边平行”，则 P↔Q 表示：四边形 ABCD 是平行四边形当且仅当四边形 ABCD 的对边平行。

1.2 命题公式与翻译

前面已经提到，原子命题和复合命题是命题的两种类型，由原子命题通过特定的“联结词”可构成复合命题。

我们已经仔细讨论了命题与命题联结词，为了进一步讨论，下面我们将在命题与命题联结词的基础上建立一个形式系统。在这个系统里，对命题联结词我们只承认它由真值表定义，并不理会它的实际含义。

1.2.1 命题变元与命题公式

一个赋予特定内容的命题的真值是确定的，只有“T”与“F”两种，即是常值命题；一个任意的没有赋予具体内容的命题是一个命题变元。下面我们正式定义命题变元：

定义 1-7：以“真”、“假”为其变域的变元称为命题变元，用 P、Q、R、S……表示。

由命题变元经命题联结词可构成命题公式，它可定义如下：

定义 1-8：命题公式规定为：

（1）单个命题变元是一个命题公式。

（2）如果 P 是命题公式则$\neg P$ 也是命题公式。

（3）如果 P、Q 是命题公式则（$P\vee Q$）、（$P\wedge Q$）、（$P\rightarrow Q$）、$P\leftrightarrow Q$ 都是命题公式。

（4）只有按上述法则所得的结果才是命题公式。

根据上述定义我们可以知道命题公式是一个按上述法则由命题变元，命题联结词及圆括号组成的字符串。

如：若 P 和 Q 是任意两个命题，则$\neg P$,（$P\vee Q$），（$P\vee Q$）$\vee$（$P\rightarrow Q$）$P\leftrightarrow$（$Q\vee P$）都是复合命题；当 P 和 Q 是命题变元，则上述各式均称作命题公式。

例 1-6：设 P、Q、R 是命题变元，根据命题公式的定义，下面的字符串哪些是命题公式哪些不是？

（1）$\neg$（$P\vee Q$）

（2）（$P\rightarrow$（$P\vee Q$））

（3）（$P\vee Q$）$\vee$（$P\rightarrow Q$）

（4）$P\leftrightarrow$（$Q\vee\neg P$）$P\leftrightarrow$（$Q\vee\neg P$）

（5）（$P\rightarrow Q$

（6）（$PQ\wedge R$）

（7）（$P\wedge\rightarrow Q$）

（8）（（$P\vee Q$）$\rightarrow R$）

解：字符串（1）~（4）是命题公式，（5）、（6）、（7）不是命题公式。

例 1-7：（（$p\vee q$）$\rightarrow$（（$\neg p$）$\leftrightarrow$（$q\wedge r$）））是命题公式，它通过以下步骤所得：

（1）p 是公式。 //根据定义 1-8 的（1）

（2）q 是公式。 //根据定义 1-8 的（1）

（3）（$p\vee q$）是公式。 //根据定义 1-8 的（3）

（4）（$\neg p$）是公式。 //根据定义 1-8 的（2）

（5）r 是公式。 //根据定义 1-8 的（1）

（6）（q∧r）是公式。　//根据定义 1-8 的（3）

（7）((¬p) ↔ (q∧r)) 是公式。　//根据定义 1-8 的（2），以及（4），（6）

（8）((p∨q) → ((¬p) ↔ (q∧r))) 是公式。//根据定义 1-8 的（2），以及（3），（7）

1.2.2　命题公式真值表的构造

由于命题公式的真假是由代换公式中的命题变元的那些命题的真假惟一确定的，当改变代换命题变元的那些命题的真值时，命题公式的真值跟着改变。所以命题公式可看成是一个以真、假为定义域，以真、假为值域的函数。

正是由于命题公式的真值只与命题公式中所出现的命题变元的真值赋值有关，所以如果命题公式中含有 n 个命题变元，则对这些命题变元的真值赋值共有 2^n 种不同情况，可通过一个表，列出在这所有情况下命题公式的真值，这种表称为该命题公式的真值表。

设有一个由 n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n 所组成的命题公式，则此公式的真值由此 n 个命题变元所惟一确定。给定 n 个确定命题变元以一组确定的值后（每个 P_i 只有真、假两种取值），按命题公式中联结词出现的先后次序及括号顺序逐步应用命题联结词的真值表，从而确定命题公式的真值（或为真或为假）。

命题变元的一组确定的值叫做命题公式的一个指派。每个指派对应公式的一个确定的值，所有的指派构成的公式的值即组成了此命题公式的真值表。

我们用下面的例子说明真值表的构造方法：

例 1-8：构造命题公式¬（P∨Q）∨（¬P→¬Q）和（P∨Q）→ ((¬P) ↔ (Q∧R)) 的真值表。

解：命题公式¬（P∨Q）∨（¬P→¬Q）有两个命题变元 P、Q，按联结词出现的先后次序及括号顺序，使用命题联结词的真值表，逐步得到公式的值。详细情况如表 1-7 所示。在表中计算真值的顺序是 P∨Q，¬（P∨Q），¬P，¬Q，最后是¬（P∨Q）∨（¬P→¬Q）。

表 1-7　命题公式¬（P∨Q）∨（¬P→¬Q）的真值表

P	Q	P∨Q	¬（P∨Q）	¬P	¬Q	¬P→¬Q	¬（P∨Q）∨（¬P→¬Q）
T	T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T

同理，可以得到命题公式（P∨Q）→ ((¬P) ↔ (Q∧R)) 的真值表，如表 1-8 所示。

表 1-8　命题公式（P∨Q）→ ((¬P) ↔ (Q∧R)) 的真值表

P	Q	R	P∨Q	¬P	Q∧R	(¬P) ↔ (Q∧R)	(P∨Q) → ((¬P) ↔ (Q∧R)
T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F	F	T

1.2.3 翻译语言句子为逻辑表达式

在很多情况下我们需要把语言的句子翻译成由命题变元和命题联结词组成的命题逻辑中的符号表达式（逻辑表达式），特别地，把句子翻译成逻辑表达式可以消除语言句子中常常出现的歧义。

把一个语言句子翻译成逻辑表达式，我们采用一个较为简单也较为合适的方法，就是用命题变元表示其中的每一个句子的成分，再找出它们之间合适的联结词。有了上一节关于命题变元和命题公式的概念，我们就可以实现从语言句子到逻辑表达式的翻译了，或者可以称为命题的符号化。

在翻译过程中有如下规定：

（1）命题公式的最外层圆括号可以省去。

（2）规定各个命题联结词的优先级别为$\neg$大于$\wedge$，$\wedge$大于$\vee$，$\vee$大于$\rightarrow$，$\rightarrow$大于$\leftrightarrow$，从而可省略命题公式中一些不必要的圆括号。

下面我们可以用几个例子来说明从语言句子翻译成逻辑表达式的过程。

例 1-9：把下面句子翻译成逻辑表达式："只有你通过了大学英语六级考试而且不是英语专业的学生，才可以选修这门课程"。

解：设命题 P 为"你通过了大学英语六级考试"，Q 为"你是英语专业的学生"，R 为"你可以选修这门课程"。并注意到句子出现了"只有…，才…"的蕴涵，所以上述句子可以翻译成如下的逻辑表达式：

$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$

例 1-10：把下面句子翻译成逻辑表达式："凡进入机房者，必须出示上机证，换拖鞋；否则拒绝进入机房"。

解：设命题 P 为"某人进入机房"，Q 为"某人出示上机证"，R 为"某人换拖鞋"，S 为："某人被拒绝进入机房"。句子中的前半部分出现"如果…，则……"的蕴涵，可以翻译为：$P\rightarrow Q\wedge R$，整个句子出现了"…当且仅当…"的蕴涵，所以上述句子可以翻译成如下的逻辑表达式：

$\neg(P\rightarrow Q\wedge R)\leftrightarrow S$

1.3 命题等价

1.3.1 命题逻辑中的永真式

研究命题的等价性是命题逻辑的重要课题。在数学证明中使用的一个重要步骤也是用真值相同的一个语句来代替另一个。现在我们就从根据命题公式所有可能出现的真值对命题公式进行分类来讨论命题的等价性，所以引入如下的几个定义：

定义 1-9：一个命题公式的真值如果与指派无关，对其所有指派均取值为真，则这个命题公式就是永真式（或重言式）。

定义 1-10：一个命题公式的真值如果与指派无关，对所有的指派均取假值，则这个命题公式就是矛盾式（或永假式）。

定义 1-11：既不是永真式又不是矛盾的命题公式称为可能式。