运筹学方法与应用

YUN CHOU XUE FANG FA YU YING YONG

吴凤平⊙编著

河海大学出版社

运 筹 学

——方法与应用

（修订版）

吴周平 编著

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学——方法与应用/吴凤平编著. —南京:
河海大学出版社,2000.12(2003.7 修订)
ISBN 7-5630-1581-7

Ⅰ.运… Ⅱ.吴… Ⅲ.运筹学—高等学校—
教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07501 号

书　　名 / 运筹学——方法与应用
书　　号 / ISBN7-5630-1581-7/O·93
责任编辑 / 陈玉国
封面设计 / 张世立
出　　版 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话 / (025)3737852(总编室)　(025)3722833(发行部)
印　　刷 / 河海大学印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米　1/32　8.25 印张　210 千字
版　　次 / 2003 年 7 月第 2 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 22.00 元

前　　言

运筹学已广泛应用于工业、农业、国防、交通、能源、水利等领域，它可以解决各行各业中的最优计划、最优分配、最优设计、最优管理、最优决策等最优化问题。无论是政府机关，还是工矿企业，要想通过科学的管理和决策，来提高运行效率，那么管理者和决策者掌握一些运筹学的基本理论和方法是十分必要的。现在高等学校中的经济管理类专业、部分工程类专业均开设了此课程。

我从事运筹学教学工作已经十几年了，通过教学实践，我感觉对于工科院校的本科生而言，应该着重让他们了解如何运用运筹学的基本方法去解决实际问题，而不宜让许多复杂的定理证明占据宝贵的学时，从而使他们失去学习运筹学的兴趣。事实上，现在许多运筹学的计算程序和软件也比较成熟，对于绝大多数同学而言，他们将来主要从事应用工作，因此，应该让他们更多地掌握建模的技巧，繁琐的计算工作完全可以由计算机来代替。我在企业界的一些朋友也反映，运筹学自学起来很麻烦，往往很难把握重点，他们很希望有一本浅显易懂的参考书，使他们尽快掌握运筹学的方法，并能指导实践。

基于此，我们编写了本书。其特点是包含大量的案例分析，却避开了许多定理证明。这本书的绝大部分内容我们已经作为教学内容在河海大学国际工商学院使用了多年，同学们普遍反映运筹学不仅没有想象的那么难学，而且学习起来似乎还很有趣。在决定出版之后，我们又在原来教学内容的基础上作了适当的修改

和补充。

本书共分八章，均为常用的运筹学的分支。比较适合于大学本科阶段的教学，也可供在工作中需要使用运筹学的方法解决实际问题的有关人员自学时使用。全书由吴凤平统一设计和统一安排编写内容。陈军飞参与编写了第四章、第五章。陈军飞和葛敏参与编写了部分案例和习题。王济干审核了全书的内容。

由于水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请指教。

作　者

2003年5月1日于河海大学

目　　录

绪　论

一、运筹学简史

运筹学是近六十年来才逐步发展起来的一门新兴的应用科学。起先研究运筹学是出于军事上的需要。在第二次世界大战前夕，德国空军已很强大，为了对付德国的空袭，1938 年，英国波得塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A. P. Rowe)提出应立即进行整个防空作战系统运行的研究，并把这种研究称为“Operational Research”，即作战研究或应用研究，这就是 OR(运筹学)这个名词的来源。二战期间，运筹学有了新的发展。英国、美国、加拿大等国家相继成立运筹学研究小组，这些小组在确定扩建舰队规模、开展反潜艇战的侦察和组织有效对敌轰炸等方面作了大量的研究，取得了大量的研究成果，为取得反法西斯战争的胜利作出了贡献。与此同时，运筹学的各大分支也得到了发展。二战后，那些从事作战研究的人员纷纷转入工业生产部门和商业部门，促进了运筹学在经济管理领域的发展。1947 年，美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)在研究美国空军资源配置问题时，提出了求解线性规划的单纯形法，较好地解决了 1939 年由前苏联学者康托洛维奇提出的线性规划模型。从此以后，线性规划方法在生产管理中得到了广泛的应用。1960 年，康托洛维奇出版了《最佳资源利用的经济计算》一书后，线性规划方法进一步得到重视，为此，康托洛维奇获得了诺贝尔奖。20 世纪 60 年代后，运筹学得到了广泛的应用并在世界各国开始普及，这一阶段运筹学进一步细分为几大分支，并且随着计算机的广泛应用，运筹学的方法已深入到社会的各个领域。

我国科学家在 20 世纪 50 年代中期引入 Operational Research，并借助于《史记》中的“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”之佳句，把

Operational Research 译为运筹学。现在，运筹学已在我国经济管理领域得到广泛的应用，运筹学的研究也日益受到政府部门和企业的重视，使我国在运筹学的某些研究分支上已达到世界水平。

二、运筹学的定义

运筹学的定义很多，有些定义往往是针对不同的研究领域得出的。目前比较公认的一个定义是"运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据"。

三、运筹学的研究步骤

应用运筹学的方法来研究问题时，首先要求用系统观点来分析问题，即不仅要求提出需要解决的问题和希望达到的目标，而且还要弄清问题所处的环境和约束条件，从而建立相应的运筹学模型，以寻找问题的最优解，为决策提供定量依据。运筹学的研究步骤主要分为以下几步：

(1) 提出问题。提出需要解决的问题。

(2) 收集资料。根据要解决的问题收集相应的基础资料。

(3) 建立模型。用数学语言描述问题，即选用适当的数学方法建立相应的数学模型。

(4) 求解。用相应的运筹学算法求出所建模型的解。

(5) 解的检验。首先检验解在理论上是否正确，其次检验解是否反映现实问题。

(6) 解的实施。向决策者提供决策所需的数据和决策方案，并付诸实施。

四、运筹学的研究分支

运筹学是一门多分支的应用科学，广泛应用于社会生活的各个领域。运筹学按所解决问题性质的差别以及所建模型的不同，

主要分为下面几大分支：

1. 规划分支

在经营管理中经常要考虑如何充分利用有限的资源实现最大的利润或在预定的任务目标下使耗费的资源最省。解决这类问题通常利用规划方法，这些规划方法构成了运筹学的规划分支。规划分支主要包括线性规划、运输问题、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划等。

2. 图论与网络计划分支

生产管理中很多问题可以转化为用图论与网络计划的方法去解决。如管道铺设的最小费用问题、交通网络的最短路问题、网络流量的最大流问题等都可用相应的图论的方法去解决，而工程的进度计划控制问题、工程的资源优化配置问题均可用网络计划的方法去解决。

3. 排队论分支

生产和生活中大量存在的拥挤和排队现象，如顾客到商店购买商品、到银行存取款、到车站购票常常要排队，对这类问题，如果增添服务设备，就要增加投资或发生空闲浪费；如果服务设备太少，排队现象严重，就会对顾客造成较大损失。研究这两者之间协调的方法，就是排队论的有关理论。

4. 存贮论分支

存贮论是研究供应与需求之间如何协调的一种方法。对企业来说，如果原料存贮不足会影响生产，甚至出现停工待料现象，而原料存贮过多，既积压资金，还要支付一笔存贮保管费用。对商店来说，若存贮商品数量不足，会发生缺货现象，从而失去销售机会而减少利润，相反也会造成损失。运筹学中关于这类问题的研究，

就是存贮论分支。

5. 对策论分支

在社会、经济管理等与人类有关的系统中，经常碰到具有竞争或对抗性质的问题。在这类问题中，参与竞争或对抗的各方各自具有不同的目标和利益。为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，并力图选取对自己最为有利或最为合理的方案。对策论就是研究对策行为中竞争的各方是否存在最合理的行动方案，以及如何找到这个合理的行动方案的数学理论和方法。因为对策的过程类似于博弈的过程，因此对策论也称为博弈论。对策论理论与方法已广泛应用于社会、经济、政治领域。如在经济活动中，各国之间，各公司企业之间的各种经济谈判，企业之间为争夺市场而进行的价格战、贸易战等；在政治方面，各种政治力量之间的斗争，各国际集团之间的斗争以及军事上各种作战战术的研究，均大量利用了对策论方法。“齐王赛马”、“石头·剪子·布”、“囚徒困境”等问题均是对策论的典型问题。

6. 决策论分支

决策是人们在政治、经济和日常生活中普遍存在的一种选择方案的行为。决策过程就是从若干备选的行动方案中选择最优的行动方案。决策过程一般包括：形成决策问题（包括提出方案、确定目标）；拟定不同的方案；确定不同的方案可能出现的结局；综合评价、决定最优方案。

运筹学在管理实践中的广泛应用，大大提高了管理的效率，推动了管理科学的发展，也为社会创造了大量的财富，节省了大量的资源。同时，通过对管理应用问题的研究，运筹学的各大分支也日趋成熟，使运筹学解决问题变得越来越实用和易用。正因为如此，我国高校的很多专业都开设了运筹学课程，特别是各经济管理类专业已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程。

第一章 线性规划

第一节 线性规划模型

线性规划是运筹学的一个重要分支。自 1947 年丹捷格提出了一般线性规划问题的求解方法——单纯形法——之后，线性规划在理论上趋于成熟，在实际应用中也日益广泛和深入。随着计算机处理能力的提高，线性规划的适用领域就更为广泛了，从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域，它已是现代科学管理的重要手段之一。

在生产实践中，常常会遇到两类优化问题：如何运用现有的资源（如人力、机器、原材料等）安排生产，使产值最大或利润最高；或者，对于给定的任务，如何统筹安排以便消耗最少的资源。线性规划是用来解决这类问题常见的方法，而建立线性规划数学模型则是用线性规划解决问题时最基本的步骤。

例 1 某工厂用钢、铁、橡胶生产 A、B 两种产品，有关资料见表 1.1：

表 1.1

产　品	单位产品 钢消耗量	单位产品 铁消耗量	单位产品 橡胶消耗量	单位产品 利　润
A	1 t	4 t	0 t	2 万元
B	2 t	0 t	4 t	3 万元

该工厂每天可获得 4 t 的钢、8 t 的铁和 6 t 的橡胶，问该工厂每天应各生产 A、B 多少件，可使总利润最大？

下面结合这道例题，我们来说明建立线性规划数学模型的基

本步骤。

第一步，假设变量。确定合适的决策变量是能否成功地建立数学模型的关键。本例中，可以设 x_1、x_2 分别表示 A、B 产品的日产量。

第二步，根据假设变量给出约束条件。约束条件是用来描述决策变量受到各种限制的等式或不等式。本例中，根据假设的变量，每天工厂的钢消耗量为 $1x_1 + 2x_2$ t，而工厂每天只能得到 4 t 的钢，故有

$$1x_1 + 2x_2 \leqslant 4$$

同理，对于铁和橡胶分别可得

$$4x_1 \leqslant 8$$
$$4x_2 \leqslant 6$$

加上 x_1、x_2 表示产品的产量，故应满足非负性，即

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

将上述不等式联立在一起，就构成了该问题的约束条件

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ 4x_1 \leqslant 8 \\ 4x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

第三步，建立目标函数。目标函数是根据假设的变量而建立的实现目标的函数表达式。本例中，该工厂希望确定 A、B 的产量使利润达到最大。如果用 z 表示利润，则有

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

我们用“Max”表示“最大”，于是得到目标函数

$$\mathrm{Max}\ z = 2x_1 + 3x_2$$

综上所述，我们将例 1 的实际问题用数学模型描述成：

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ 4x_1 \leqslant 8 \\ 4x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

由于这一模型中的目标函数和约束条件均为线性函数关系，所以我们将这一模型称为“线性规划模型”。

例 2 靠近某河流有两个化工厂（见图 1.1），流经第一化工厂的河流流量为每天 500 万 m^3，在两个工厂之间有一条流量为每天 200 万 m^3 支流。第一化工厂每天排放含有某种有害物质的工业污水 2 万 m^3，第二化工厂每天排放这种工业污水 1.4 万 m^3。从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前，有 20%可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%。这两个工厂都需各自处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是 1 000 元/万 m^3，第二化工厂处理工业污水的成本是 800 元/万 m^3。现在要问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使这两个工厂总的处理工业污水费用最小。

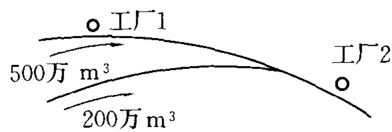

图 1.1

解：这个问题可用数学模型来描述。设第一化工厂每天处理工业污水量为 x_1 万 m^3，第二化工厂每天处理工业污水量为 x_2 万 m^3，从第一化工厂到第二化工厂之间，河流中工业污水含量要不大于 0.2%，由此可得近似关系式

$$(2 - x_1)/500 \leqslant 2/1\,000$$

流经第二化工厂后，河流中的工业污水量仍要不大于 0.2%，这时

有近似关系式

$$[0.8(2-x_1)+(1.4-x_2)]/700 \leqslant 2/1\,000$$

由于每个工厂每天处理的工业污水量不会大于每天的排放量，故有

$$x_1 \leqslant 2$$
$$x_2 \leqslant 1.4$$

该问题的目标是要求两厂用于处理工业污水的总费用最小。即 $z = 1\,000x_1 + 800x_2$ 最小。综上所述，这个环保问题可用数学模型表示为：

$$\text{Min } z = 1\,000x_1 + 800x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 1 \\ 0.8x_1 + x_2 \geqslant 1.6 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_2 \leqslant 1.4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

从上面两个例子可以看出，线性规划问题的数学模型一般型式为：

$$\text{Max (Min)} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\ x_1, x_2 \cdots x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，c_j，a_{ij}，b_i $(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 均为已知实常数。

第二节　线性规划模型的标准型

由于线性规划模型的目标函数和约束条件内容和形式上的差别，使线性规划模型多种多样。为了便于以后讨论线性规划的单纯形算法，规定线性规划模型的标准型式如下：

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (b_1 \geqslant 0) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (b_2 \geqslant 0) \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (b_m \geqslant 0) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

其简写型式是：

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.5}$$

用向量形式表示为

$$\text{Max } z = CX$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j = b \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1.6}$$

其中，C 为价值向量；P_j 为变量 x_j 的系数列向量；X 为决策变量向量；b 为资源向量。

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n), X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$