人教版新教材

黄冈

同步学案

高一数学 下

黄冈市教学创新课题组 编写

兵法

陕西师范大学出版社

我们追求什么
——代出版说明

亲爱的同学，也许你是《黄冈兵法》刚结识的新朋友，也许你是多年的老朋友，你看着我长大，我也见证了你成长的每一步——我们一同经历长大的烦恼，享受成熟的喜悦，点点滴滴在心头。

如今，在全国各大、中书店的教辅图书卖场里，你都能看到《黄冈兵法》这一醒目的书名，以及封面上三支射向靶标的箭；也能看到众多读者在《黄冈兵法》书架前流连、翻阅的身影。《黄冈兵法》几年来走遍大江南北，走进千万个重点中学，走进千百万个渴望成功与进步的学子的心田……雪片似的读者来信从全国各地飘至编辑部，学子们倾诉成长的烦恼、阐述学习的心得、奉献对图书进行修订和改正的建议与智慧……

我们感到自豪，我们共同拥有《黄冈兵法》，她是我们与千百万个学子进行交流的窗口与平台；

我们感到欣慰，《黄冈兵法》寄托了千百万个学子的期望，见证了你生活的每一天，成长的每一步……

《黄冈兵法》作为陕西师范大学出版社的品牌图书，自2000年面世，便以“权威、系统、实用”等特点深受广大读者喜爱，迅速成长为全国著名品牌。几年来，我们倾注了无数的心血和热情，始终致力于为孜孜以求的学子提供最系统、最有效的学习、应试方案。如今，我们仍在探索、创新，力求使丛书的使用功能更加完善，图书质量更上一层楼，以紧贴教改形势、符合学生发展实际的更多更好的内容和形式，满足读者的实际需求。

“我是广州的学生，抱着试试看的心态买了本《黄冈兵法·初二代数》。哇，书里的内容设计非常丰富，多为常考题目，我特别钟爱，于是向老师推荐。老师以A级评价这本书(被老师以A级评价的辅导书寥寥无几)，并在我们年级里热情推荐，所以全年级的同学人手一本。在期末考试后，全年级数学科平均分奇迹般地突破学校6年的纪录(平均分为96分，最高分满分，最低分87分)，这个纪录在第二学期中得到了保持……”一位广州市海珠区

的中学生朋友在信中如是说。几年来,《黄冈兵法》陪伴着无数学子的日常学习、备考复习,像一位饱学的良师益友,为大家答疑解惑,清除学习道路上的障碍。正是由于这些实实在在的效果,《黄冈兵法》赢得了读者朋友们的认同和信赖,连年畅销,深受市场欢迎。

那么,《黄冈兵法》到底有什么独特之处呢?太原市山西大学附中的一位初三学生在信中这样评价:"作为《黄冈兵法》的忠实读者,我很庆幸可以在每学期都拥有这样一本内容全面、质量很高的辅导书,它从启迪思维方法出发,精选例题,全方位、多角度地讲解知识点,为我打下了坚实的基础,特别是分级训练、思维延伸等板块,既巩固了课本知识,又深入解剖教材,全面提高了我的解题能力,使我从中等水平一跃成为班上前五名……"一位山东省临沂一中高二的学生在来信中写到:"我对《黄冈兵法》的评价非常高,它最大的特点是针对性强,简洁实用,练习题有层次,答案详尽,重视思路提示,很适合像我这样理解能力较弱的中等学生使用,我非常高兴,终于买到了物有所值的参考书……"的确,"系统性、针对性、提高性"是《黄冈兵法》最大的特点。在编写过程中,丛书始终贯彻"实践、探究、创新"三位一体的结构模式,侧重学法指导,启迪思维方法。研发人员通过不断地探索和大量地调研,推出了"创设生活意境—提出现实问题—归纳知识规律—解决实际问题—探究拓广新知"的全新编写体例,提供了全面深入的学习内容和生动丰富的学习情境与助学资讯,通过大量精心编排的典型例题和习题,铺架阶梯式的能力提升程式,培养和提高学生应用知识、解决问题的能力,重视学生的均衡发展。

《黄冈兵法》出版几年来,先后荣获全国优秀教育图书奖和全国优秀畅销书奖,凭借着特有的魅力和雄厚的实力,赢得了广大读者的青睐。在一片赞誉声中,丛书策划人和作者们没有丝毫的懈怠,而是积极搜集教改前沿信息,不断地推出最新教研成果,并迅速转化为最新的栏目设计和内容设计,以求不断地提高丛书的品质和使用效果。

我们的追求,是以《黄冈兵法》为火种,点燃全国中学生创新思维的火把,指引他们走进成功之门。

《黄冈兵法》策划组

MU LU 目录

第四章 三角函数

4.1 角的概念的推广

知能转化导引

通过本节的学习,要求理解任意角的概念,学会在平面内建立适当的直角坐标系来讨论任意角;能在0°到360°范围内找到与此范围外一个已知角终边相同的角,判定其为第几象限的角;能写出与任一已知角终边相同的角的集合.

本节学习的主要内容有:

(1) 任意角的概念:角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.规定按逆时针方向旋转形成的角叫做正角;按顺时针方向旋转形成的角叫做负角;如果一条射线没有作任何旋转,称它形成了一个零角.

(2) 终边相同的角和终边相同的角的集合:所有与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

方法技巧规律

1. 理解任意角的概念

在初中,角的定义有两种:一种是从一点出发的两条射线所形成的图形叫做角,这是角的静态定义;另一种是由一条射线绕其端点旋转所形成的图形叫做角,这是角的动态定义.

从角的动态定义看,一条射线绕其端点旋转时有两个问题:一个是旋转方向的问题,旋转方向有两种,一种是按逆时针方向旋转而形成正角,另一种是按顺时针方向旋转而形成负角;另一个是旋转量的问题,这条射线可以不作任何旋转而形成零角,也可以不断地旋转下去,这样一来,角的范围就打破了0°~360°的限制,从而形成任意大小的角.

因此,按角的形成过程(或角的大小)来分类,角可以分为正角、负角和

零角三类.

在直角坐标系中讨论角时,我们约定角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边可能落在某一象限内,也可能落在坐标轴上.角的终边落在第几象限,就称这个角是第几象限的角.如果角的终边落在坐标轴上,这时的角就不属于任何象限.

我们把终边落在象限内的角统称为象限角,而把终边落在坐标轴上的角统称为轴上角.因此,在直角坐标系中,按角终边的位置来分类,角可以分为象限角和轴上角两类.

象限角和轴上角是相互联系的,某一象限角可以看做是某一轴上角加上(或减去)一个锐角.

2. 理解终边相同的角的概念,掌握终边相同的角的表示

在直角坐标系中,对于一个任意大小的角只有一条射线作为它的终边,但是,反过来,终边为某一条射线的角却可以表示无数多个角.我们把终边为同一条射线的角叫做终边相同的角.

一个角每增加或减少 360°,终边又回到原来的位置.因此,角 α 以及所有与角 α 终边相同的角都可以表示为 $\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,因而,与角 α 终边相同的角的集合就是 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

我们在掌握上述结论时,首先要注意以下几点:(1) α 是一个任意大小的角;(2) k 是整数;(3) $k\cdot 360^\circ$ 与 α 之间是用"+"号连接.如 $k\cdot 360^\circ-30^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$应看成 $k\cdot 360^\circ+(-30^\circ)(k\in\mathbf{Z})$,它表示与 -30°角终边相同的角.

要表示终边在某一位置的角,可以先表示出终边在该位置的 $0^\circ\sim 360^\circ$间的一个角,然后再加上 $k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

要判断两个角的终边是否相同,只需看它们的差是否相差 360°的整数倍.如果两个角相差 360°的整数倍,那么它们的终边相同;否则它们的终边就不同.

相等的角的终边一定相同,但终边相同的角不一定相等.终边相同的角有无数多个,它们相差 360°的整数倍.

3. 熟练掌握轴上角和象限角的表示

终边在 x 轴正半轴上的角就是与 0°角终边相同的角,因此可以表示为 $k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

终边在 x 轴负半轴上的角就是与 180°角终边相同的角,因此可以表示为 $180^\circ+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

终边在 x 轴正半轴上的角和终边在 x 轴负半轴上的角统称为终边在 x

轴上的角.把终边在 x 轴正半轴上的角 $0^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 和终边在 x 轴负半轴上的角 $180^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 合起来就是 $k\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$.因此,终边在 x 轴上的角可以表示为 $k\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

同样的道理,终边在 y 轴正半轴上的角可以表示为 $90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$;终边在 y 轴负半轴上的角可以表示为 $270^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.因此,终边在 y 轴上的角可以表示为 $90^\circ+k\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

我们把终边在 x 轴上的角 $k\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 和终边在 y 轴上的角合起来,就是 $k\cdot90^\circ(k\in\mathbf{Z})$.因此,终边在坐标轴上的角可以表示为 $k\cdot90^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

第一象限的角就是与 $(0^\circ,90^\circ)$ 间的某一个角的终边相同的角,因此,第一象限的角可以表示为 $\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,其中 $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$.第一象限的角的集合就是 $\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z}),\alpha\in(0^\circ,90^\circ)\}$,即 $\{\beta\mid k\cdot360^\circ<\beta<90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

其他象限的角的集合分别可以写成:

第二象限的角的集合是 $\{\beta\mid90^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限的角的集合是 $\{\beta\mid180^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<270^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限的角的集合是 $\{\beta\mid270^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<360^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

能力升级途径

【例 1】 下列说法中,正确的是(　　)

A. 第一象限的角是锐角

B. 锐角是第一象限的角

C. 小于 90° 的角是锐角

D. 0° 到 90° 的角是第一象限的角

分析 本题涉及几个基本概念,即"第一象限的角""锐角""小于 90° 的角"和"0° 到 90° 的角".在角的概念推广以后,这些概念容易混淆.因此,弄清这些概念以及它们之间的区别是正确解答本题的关键.

解答 第一象限的角可以表示为 $k\cdot360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,锐角可以表示为 $0^\circ<\alpha<90^\circ$,小于 90° 的角可以表示为 $\alpha<90^\circ$,0° 到 90° 的角可以表示为 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$.因此,"锐角是第一象限的角"是当 $k=0$ 时的特殊情况,故 A、C、D 均不正确,应选 B.

易错点 本题错选 A 和 C 的原因在于还没有建立任意大小角的概念,没有"冲出"$0^\circ\sim360^\circ$ 间角的框框,而默认为角就是 $0^\circ\sim360^\circ$ 间的角.如错选 C 时就没有注意还有负角和零角也小于 90°.错选 D 的原因在于没有理解 0° 到 90° 间的角的意义,而忽略了 0° 这个特殊情形.一般地,α 到 β 的角就是在区间 $[\alpha,\beta)$ 间的角,它应包括 α 而不包括 β.

延伸点

1. 下列 4 个命题：

① 第一角限的角一定不是负角；

② 第二象限的角大于第一象限的角；

③ 第二象限的角是钝角；

④ 小于 180°的角是钝角、直角或锐角.

其中真命题的个数为(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

分析　根据第一象限角、第二象限角、锐角、直角、钝角和负角的意义去判断.

解答　① 是假命题，因为负角是按顺时针方向旋转而形成的角，它的终边可能落在第一象限；② 是假命题，因为第一象限角和第二象限角表示角的终边分别落在第一象限和第二象限，它们之间没有确定的大小关系；③ 是假命题，因为钝角是在区间(90°,180°)内的角，它的终边在第二象限，但第二象限的角不是都在区间(90°,180°)内；④ 也是假命题，在小于 180°的角中还有负角. 故选 A.

2. 若角 α 和角 β 的终边互为反向延长线，则 α 与 β 之间的关系一定是(　　)

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha=\beta+180^\circ$　　D. $\alpha=\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$

分析　角 α 和角 β 的终边互为反向延长线，那么角 α 与角 $\beta+180^\circ$ 的终边相同.

解答　因为角 α 和角 β 的终边互为反向延长线，所以角 α 与角 $\beta+180^\circ$ 的终边相同，因为 $\alpha=\beta+180^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.

【例 2】　若角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称，则 α 与 β 间的关系是__________.

分析　角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称，则 α 与 $-\beta$ 的终边相同.

解答　因为角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称，所以 α 与 $-\beta$ 的终边相同，因此 $\alpha=-\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 故应填 $\alpha=-\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

技巧点　把角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称的关系转化为 α 与 $-\beta$ 的终边相同的关系，从而确定 α 与 β 间的关系.

延伸点

1. 若角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称，则 α 与 β 间的关系是_______；若角 α 与 β 的终边关于原点对称，则 α 与 β 间的关系是_______.

分析 角 α 与 β 的终边关于 y 轴对称，则 α 与 $180^\circ-\beta$ 的终边相同；角 α 与 β 的终边关于原点对称，则 α 与 $180^\circ+\beta$ 的终边相同.

解答 因为 α 与 β 的终边关于 y 轴对称，所以 α 与 $180^\circ-\beta$ 的终边相同，因此 $\alpha=180^\circ-\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=-\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$；因为 α 与 β 的终边关于原点对称，所以 α 与 $180^\circ+\beta$ 的终边相同，因此 $\alpha=180^\circ+\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 故应分别填 $\alpha=-\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 和 $\alpha=\beta+(2k+1)\cdot180^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

2. 若角 α 的终边与 -40° 角的终边互相垂直，则角 $\alpha=$_______.

分析 因为角 α 的终边与 -40° 角的终边互相垂直，所以角 α 的终边与 $-40^\circ+90^\circ$ 角的终边相同或与 $-40^\circ-90^\circ$ 角的终边相同.

解答 因为角 α 的终边与 -40° 角的终边互相垂直，所以角 α 的终边与 $-40^\circ+90^\circ$ 角的终边相同或与 $-40^\circ-90^\circ$ 角的终边相同. 因此 $\alpha=-40^\circ+90^\circ+k\cdot360^\circ$ 或 $\alpha=-40^\circ-90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=-40^\circ+(4k+1)\cdot90^\circ$ 或 $\alpha=-40^\circ+(4k-1)\cdot90^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 把两式合并在一起，就是 $\alpha=-40^\circ+(2k+1)\cdot90^\circ(k\in\mathbf{Z})$. 故应填 $\alpha=-40^\circ+(2k+1)\cdot90^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

【例 3】 已知角 α 是第二象限的角，试确定 $-\alpha$、2α、$\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限.

分析 由于角 α 是一个第二象限的角，所以 α 与 $(90^\circ,180^\circ)$ 间的某一个角 β 的终边相同，由此可分别确定 $-\alpha$、2α、$\frac{\alpha}{2}$ 与哪些范围的角的终边相同，从而分别确定出它们终边所在的象限.

解答 因为角 α 是第二象限的角，所以 $\alpha=\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，其中 $90^\circ<\beta<180^\circ$. 所以 $-\alpha=-\beta-k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 $-\alpha$ 与 $-\beta$ 的终边相同，而 $-180^\circ<-\beta<-90^\circ$，所以 $-\beta$ 是第三象限的角，故角 $-\alpha$ 是第三象限的角，$-\alpha$ 的终边在第三象限.

$2\alpha=2\beta+2k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，即 2α 与 2β 的终边相同，而 $180^\circ<2\beta<360^\circ$，所以 2β 的终边在第三、四象限或在 y 轴的负半轴上，故角 2α 的终边在第三、四象限或在 y 轴的负半轴上.

$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}+\frac{k}{2}\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，由于 $\frac{k}{2}$ 不一定是整数，故应对 k 进行讨论.

当 k 是偶数时，即 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$ 与 $\frac{\beta}{2}$ 的终边相同，而 $45^\circ<\frac{\beta}{2}<90^\circ$，所以 $\frac{\beta}{2}$ 的终边在第一象限，故 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限；

当 k 是奇数时，即 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}+180^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{2}$ 与 $180^\circ+\frac{\beta}{2}$ 的终边相同，而 $225^\circ<\frac{\beta}{2}+180^\circ<270^\circ$，$180^\circ+\frac{\beta}{2}$ 在第三象限，故 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限.

综上所述，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限或第三象限.

技巧点　欲判断一个角终边所在的象限，可先确定该角与某一个已知角的终边相同，通过已知角终边所在的位置确定该角终边所在的象限. 本题还可以通过如下方法来解：先由角 α 是第二象限的角，可知 α 的范围是 $90^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，由此可分别求出 $-\alpha$、2α、$\frac{\alpha}{2}$ 的范围，从而分别确定出 $-\alpha$、2α、$\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限. 如：

因为 $90^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，
所以 $-180^\circ-k\cdot360^\circ<-\alpha<-90^\circ-k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，
所以 $-\alpha$ 是第三象限的角，$-\alpha$ 的终边在第三象限.

在确定 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限时，要注意对 k 进行讨论.

延伸点

1. 写出在 $-720^\circ\sim720^\circ$ 间与 -1020° 角终边相同的角.

分析　根据终边相同的角的表示求解.

解答　与 -1020° 终边相同的角是 $-1020^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，根据题意，有 $-720^\circ\leqslant-1020^\circ+k\cdot360^\circ<720^\circ$，解得 $\frac{5}{6}\leqslant k<\frac{29}{6}$，由于 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1,2,3,4$.

从而所求的角为

$-1020^\circ+1\times360^\circ=-660^\circ$，$-1020^\circ+2\times360^\circ=-300^\circ$，$-1020^\circ+3\times360^\circ=60^\circ$ 和 $-1020^\circ+4\times360^\circ=420^\circ$.

2. 若集合 $A=\{\alpha\mid60^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})\}$，集合 $B=\{\alpha\mid-210^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

新教材同步学案

分析 把两个表示角的集合放在同一直角坐标系中表示出来.

解答

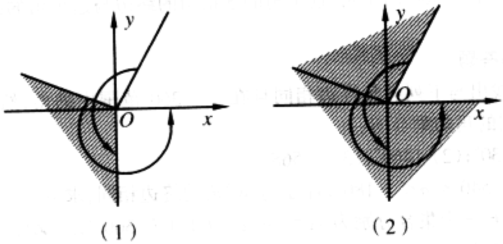

图 4-1-1

如图 4-1-1(1)所示,由图可知 $A\cap B=\{\alpha\,|\,150°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})\}$;

如图 4-1-1(2)所示,由图可知 $A\cup B=\{\alpha\,|\,60°+k\cdot360°<\alpha<360°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})\}$.

基础能力测试

一、选择题

1. 在下列各组角中,终边不相同的一组是(　　)

A. $60°$和$-300°$　　B. $230°$和$950°$

C. $1050°$和$-30°$　　D. $1000°$和$80°$

2. 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$,$B=\{$锐角$\}$,$C=\{$小于$90°$的角$\}$,则下列关系中正确的是(　　)

A. $A=B=C$　B. $A\subsetneqq C$　C. $A\cap C=B$　D. $B\cup C=C$

3. 若 α 是第四象限的角,则 $180°-\alpha$ 一定是(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. 设角 α,β 满足 $-90°<\alpha<\beta<90°$,则 $\alpha-\beta$ 的范围是(　　)

A. $-180°<\alpha-\beta<0°$　　B. $-90°<\alpha-\beta<90°$

C. $-90°<\alpha-\beta<0°$　　D. $-180°<\alpha-\beta<180°$

5. 已知角 α 终边上有一点 $P(b,0)(b<0)$,则角 α 是(　　)

A. 第三象限角　　B. 第四象限角

C. 第三或第四象限角　　D. 以上答案都不对

二、填空题

6. 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合是________.

7. α 为小于 $360°$的正角,这个角的 5 倍角的终边与这个角的终边重合,则 $\alpha=$________.

三、解答题

8. 先找出与下列各角终边相同且在 $0°\sim360°$范围内的角,然后写出与其终边相同的角的集合 S:

(1) $-30°$;(2) $1460°$;(3) $-568°$.

9. 若 $-540°<\alpha<-180°$,且 α 与 $40°$角的终边相同,求 α.

10. 已知三个集合分别为 $A=\{\alpha\mid\alpha=60°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})\}$,$B=\{\alpha\mid\alpha=60°+k\cdot720°(k\in\mathbf{Z})\}$,$C=\{\alpha\mid\alpha=60°+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})\}$,试确定集合 A、B、C 之间的关系.

发展思维训练

11. 已知角 α、β 的终边关于直线 $x+y=0$ 对称,且 $\alpha=-60°$,求角 β.

12. 若将时间拨慢了 5min,则时针转了多少度?分针转了多少度?

4.2　弧度制

学习目标　通过本节的学习,要求了解角度制和弧度制的概念,理解 1 弧度的角的概念,掌握角的弧度数的度量方法,掌握弧度与角度之间的换算关系,熟练掌握几个特殊角的弧度与角度之间的换算,掌握弧长公式和扇形的面积公式.

本节学习的主要内容有:

(1) 1 度的角和 1 弧度的角:周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角,把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

(2) 角的弧度数:正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 0;角 α 的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$,其中 l 是以角α 作为圆心角时所对的弧长,r 是圆的半径.

(3) 弧度与角度间的换算:$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx57.30°$,$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx$

0.01745rad.

(4) 弧长公式和扇形面积公式：$l=|\alpha|r$，$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$，其中 l 是弧度数为 α 的圆心角所对的弧长，r 是圆的半径.

1. 了解弧度和弧度制，认清弧度制的意义

弧度制是以弧度为单位的度量角的单位制，它作为一种单位制，我们必须了解其两个方面的内容：一是1个单位，是1弧度；二是度量方法，即正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0，角的弧度数的绝对值是该角所对的圆弧的弧长与半径的比值. 应当注意的是，角的弧度数是一个与圆的半径无关的量.

引进弧度制的意义主要在于如下几个方面：(1) 用角度制度量角时，在角的集合与实数集之间建立了一种一一对应的关系，这时实数是角的度数；用弧度制度量角时，在角的集合与实数集之间也建立了一种一一对应关系，这时实数是角的弧度数. (2) 用角度制度量角时，是十进制、六十进制并用，若要找出与这个角对应的实数不太方便；而用弧度制度量角则只用到十进制，找出与角对应的实数就比较方便. (3) 用弧度制度量角时，大大地简化了弧长公式和扇形的面积公式，如下表所示：

	角度制	弧度制
弧长公式	$l=\frac{n\pi r}{180}$	$l=\|\alpha\|r$
扇形面积公式	$S=\frac{n\pi r^2}{360}$	$S=\frac{1}{2}\|\alpha\|r^2$

2. 掌握角的度数与弧度数之间的换算，熟练掌握一些特殊角的度数与弧度数之间的换算

(1) 把角的弧度数化为度数主要有两种方式：一是利用 $\pi=180^\circ$，把弧度化为度，如$\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\times180^\circ=108^\circ$；二是利用 $1\approx57.30^\circ$，把弧度化为度，如 $4\approx4\times57.30^\circ=229.20^\circ$. 在目前，我们对用角度制表示角比较熟悉，而对用弧度制表示角还不十分熟悉的情况下，把弧度化为度是我们必须要熟练掌握的.

(2) 把角的度数化为弧度数也是主要有两种方式：一是利用式子 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$，把角度化为弧度，如 $225^\circ=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{4}$；二是利用式子 $1^\circ\approx0.01745$，把角度化为弧度，如 $4^\circ\approx4\times0.01745=0.0698$.

(3) 一些特殊角的度数与弧度数之间的换算如下表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

对于这些特殊角的度数与弧度数之间的换算我们必须熟练掌握.

3. 掌握弧度制下终边相同的角的表示

在上一节中我们讲到，所有与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)都可以表示为 $\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式，这里角 α 是用角度制表示的. 如果表示角 α 的单位是弧度，那么，所有与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)都可以表示为 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，这就是在弧度制下终边相同的角的表示. 我们要熟练运用这一结论来表示终边相同的角. 应当注意的是：角度制和弧度制不能混用，如与 30°角终边相同的角就只能表示成 $30°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式，而不能表示成 $30°+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

4. 掌握弧长公式和扇形的面积公式

在初中，由于角是用角度制表示的，弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$ 和扇形的面积公式 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$ 比较复杂，很难将它们记住. 引进弧度制后，虽然说这两个公式得到了大大的简化，但很多同学仍然存在着一定的心理障碍. 事实上，我们在记忆这两个公式时不妨采取"特值记忆法"和"类似记忆法"，如下表所示：

	弧长	面积
圆	$c=(2\pi)r$	$S=\pi r^2=\frac{1}{2}(2\pi)r^2$
扇形	$l=\vert\alpha\vert r$	$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\vert\alpha\vert r^2$
三角形		$S=\frac{1}{2}\times$底$\times$高

典题精析　【例 1】　已知集合 $M=\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列各集合中与 M 相等的是(　　)

A. $\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\{\alpha\mid\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\left\{\alpha \middle| \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi \text{或} k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

分析 对 k 分奇数和偶数两种情况讨论.

解答 当 k 为奇数时,即 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时,$\alpha=\frac{k\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$;当 k 为偶数时,即 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$时,$\alpha=\frac{k\pi}{2}=n\pi$.故选 D.

易错点 只考虑一种情况,分析问题不全面而错选 A.事实上,$M=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$表示终边在坐标轴上所有角的集合,而终边在坐标轴上的角可以分为两类,一类是终边在 x 轴上的角,另一类是终边在 y 轴上的角,而终边在 x 轴上的角可以表示为$\alpha=n\pi(n\in\mathbf{Z})$的形式,终边在 y 轴上的角可以表示为 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$的形式,故选 D.

延伸点

1. 设集合 $A=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x \middle| x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 A 和 B 之间的关系是(　　)

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

分析 本题关键在于弄清角$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$和 $k\pi(k\in\mathbf{Z})$的意义.

解答 因为$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$表示终边在坐标轴上的角,所以集合 A 表示终边在四个象限的角平分线上的所有角的集合;又 $k\pi(k\in\mathbf{Z})$表示终边在 x 轴上的角,所以集合 B 也表示终边在四个象限角平分线上的所有角的集合.因此 $A=B$,故选 C.

2. 已知集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\{\alpha \mid -\pi\leqslant\alpha<\pi\}$,则 $A\cap B=$(　　)

A. $\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

B. $\left\{-\pi,-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$

D. $\left\{-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$

分析　先求出整数 k 的值，从而求出组成集合 $A\cap B$ 的所有角 α.

解答　由 $-\pi\leqslant\frac{k\pi}{3}<\pi$ 解得 $-3\leqslant k<3$，而 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=-3,-2,-1,0,1,2$. 所以 $A\cap B=\left\{-\pi,-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$. 故选 B.

【例 2】 3 弧度的角的终边在第________象限；-2 弧度的角的终边在第________象限.

分析　根据终边相同的角的表示求解.

解答　方法一：因为 $\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以 3 是第二象限的角；又 $-\pi<-2<-\frac{\pi}{2}$，所以 -2 是第三象限的角.

方法二：分别把 3 和 -2 化为度，$3\approx3\times57.30^\circ=171.90^\circ$，$-2\approx-2\times57.30^\circ=-114.60^\circ$，所以 3 是第二象限的角，$-2$ 是第三象限的角.

技巧点　由于我们对于用度表示角比较熟悉，因此把角的弧度化为度是比较好的一种方法.

延伸点

1. 若 α 与 $\frac{5\pi}{4}$ 的终边相同，且 $-3\pi<\alpha<-\pi$，则 $\alpha=$________.

分析　根据终边相同的角间的关系以及角 α 的范围求解.

解答　方法一：因为 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，且 $-3\pi<\alpha<-\pi$，所以 $-3\pi<\frac{5\pi}{4}+2k\pi<-\pi$，解得 $k=-2$，所以 $\alpha=-\frac{11\pi}{4}$.

方法二：画图求解. 如图 4－2－1 所示，画出在 $(-3\pi,-\pi)$ 内且与 $\frac{5\pi}{4}$ 终边相同的角，由图可知，$\alpha=-\frac{11\pi}{4}$.

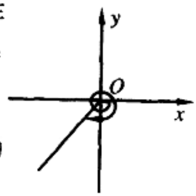

图 4－2－1

2. 若三角形的三个内角之比为 2:3:4，则各角的弧度数分别是________.

分析　由三角形的内角和为 π 得出结果.

解答　因为三角形的三个内角之比是 2:3:4，所以可设三个内角分别为 $2k$、$3k$、$4k$，又三角形的内角和为 π，所以 $2k+3k+4k=\pi$，解得 $k=\frac{1}{9}\pi$，由此可得三个内角分别为 $\frac{2\pi}{9}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{4\pi}{9}$.

【例 3】 已知 4 弧度的圆心角所对的弦长为 4，求这个圆心角所对的弧