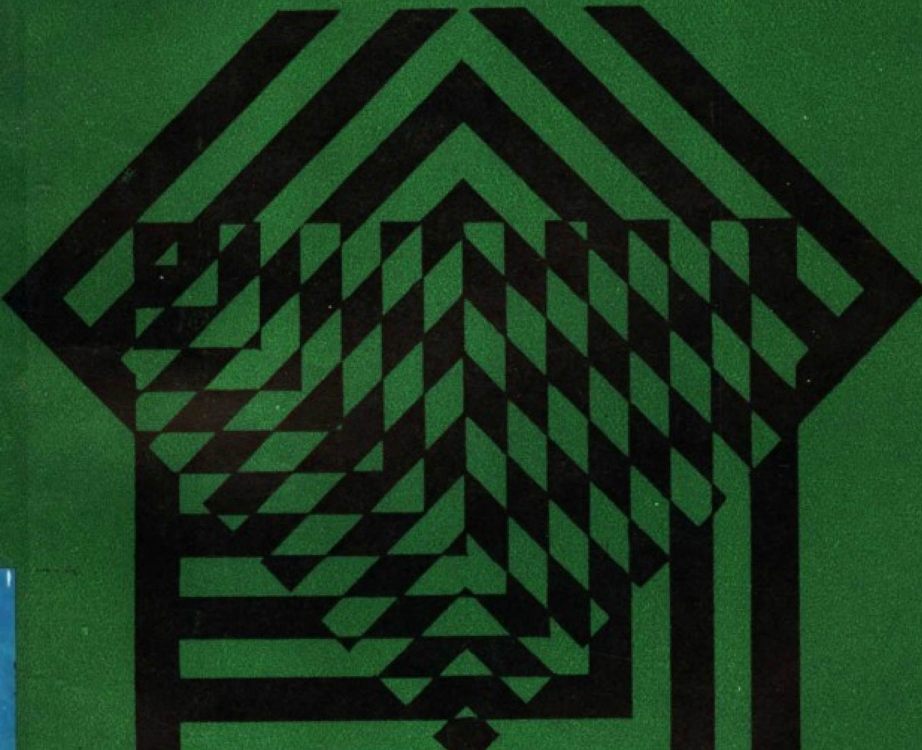
因式分解的方法与技巧



广西教育出版社

责任编辑：黄力平
封面设计：言 辉 文 光

中学数学专题辅导丛书

ISBN 7-5435-0234-8/G·187
定价：0.51元

因式分解的方法与技巧

吕 俊

广西教育出版社

因式分解的方法与技巧

吕 俊

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7号）

南宁市人民印刷厂印刷 广西新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 2.25印张 45千字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印 数 1—18,000册

ISBN 7-5435-0234-8/G·187

定价：0.51元

前　言

因式分解在数学中占有突出重要的地位，不但在代数的许多其它部分中常常应用，而且在三角、几何、解析几何、微积分，乃至物理、化学的公式变形等方面也有应用．

把多项式分解为若干个因式相乘，有许许多多的特殊技巧．这些丰富多彩的特殊技巧，是人们长期以来逐步积累起来的．作为代数的组成部分的因式分解，其任务就是使这些技巧系统化．

本书首先简单阐明多项式的基础知识和因式分解的概念，在此基础上着重论述因式分解的各种方法．在每种方法里，尽量介绍各式各样的技巧．最后，就如何选用或综合运用这些方法作出小结，使读者对学过的方法和技巧更能全面掌握．

本书注意循序渐进和由浅入深的原则，力求说理简单易懂，选例典型且具有启发性，练习题全面且富有代表性，书末附有练习题答案，供读者自我检查参考．本书只要具有初中文化程度即可看懂．

本书的主要读者对象是中学生和有志自学成材的青年．本书也可作为中学教师备课参考或补充教材之用．

吕　俊

1987年8月

目　录

一、多项式和因式分解

因式分解是把多项式进行恒等变形的一种重要方法。为了确切地理解因式分解的概念和方法，有必要先学习多项式的一些知识。

由数字和若干个字母经过有限次乘法运算所得到的代数式称为单项式。

单项式的字母可以代表常量或变量．要判别一个代数式是否单项式，最关键的是变量的指数必须是非负整数．因为如果指数是正分数，就意味着变量要开方；如果指数为负整数，就意味着变量有除法运算．单项式中的数字因数称为单项式的系数。在有理数范围内，系数可以是正或负的整数或分数．例如-3，$\frac{1}{2}$，$-5ax^2$，$\frac{1}{4}abx^2y^3$，都是有理系数的单项式．在实数范围，系数可以是无理数，如$\sqrt{3}$，πab，$-\frac{\sqrt{2}}{2}xy^2$。复数范围内，系数可以为复数，如$-3xi$，$2y^2i$。

单项式中代表变数的字母也叫做元，所有的元的指数和，称为这个单项式的次数．例如ax^3y，若a为常量，x、y为变量，那么这个单项式叫二元四次单项式。$\sqrt{2}x^2y^2$是实数范围的二元四次单项式。

有限个单项式的和称为多项式，也称整式。合并同类项后的多项式的各个单项式称为这个多项式的项，各项中最高

的次数称为这个多项式的次数．多项式按所含元的个数分别称“一元多项式”、“二元多项式”等等。

例如：①$x+2y$，②$3ab-a^2b$，③x^3-2x^2-x+5，④$\frac{1}{3}x^2y^2-2xy-\frac{\sqrt{3}}{4}$，这些式子都是多项式．其中③式叫一元三次多项式，④式叫二元四次多项式。

$\sqrt{x}-1$，$1-x+x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}$，$\frac{1}{x}-2$，这些式子都不是关于x的多项式。式子里只要有一个字母（变数）的指数不是非负整数，就不是多项式。

每项的次数都相同的多项式叫齐次多项式，如$2xy+x^2+4y^2$。

单项式可以看作是多项式的特例。

两个多项式可以相加、相减、相乘、相除。

两个多项式相加、减、乘之后，所得的和、差、积仍是多项式。两个多项式相除，其结果有两种情形，且看下面的例子。

例1．设$A=x^4-24x^2+x^3+51$，$B=x^2-3+2x$，求$A\div B$。

解：先将两式都按同一字母x降幂排列，写成竖式运算如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x-19 \\
\cline{2-2}
x^2+2x-3 & x^4+x^3-24x^2+0+51 \\
 & x^4+2x^3-3x^2 \\
\cline{2-2}
 & -x^3-21x^2+0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-x^{3}-2x^{2}+3x \\
\hline
-19x^{2}-3x+51 \\
-19x^{2}-38x+57 \\
\hline
35x-6
\end{array}
$$

运算到此已不能继续下去，因为$35x-6$比B式次数低．这里，$35x-6$为余式。

一般地说，被除式、除式、商式和余式之间，有如下的关系：

被除式＝除式×商式＋余式。

上面竖式运算中，事实上只和各系数有关，故列竖式时可以只列出被除式和除式的系数（注意按降幂排列，缺项要补零），照样运算，得到商式及余式的系数后，再补上字母及其指数即可．这样的方法叫**分离系数法**．现仍以上例按分离系数法列竖式运算如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1-1-19 \\
\cline{2-2}
1+2-3 & 1+1-24+0+51 \\
 & 1+2-3 \\
\cline{2-2}
 & \quad -1-21+0 \\
 & \quad -1-2+3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -19-3+51 \\
 & \qquad -19-38+57 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 35-6
\end{array}
$$

∴商式$=x^{2}-x-19$，余式$=35x-6$。

例2. 设$A=6x^3+2-3x^2-4x$，$B=2x-1$，求$A\div B$.

解：将A式及B式按x的降幂排列，用分离系数法列竖式运算：

$$
\begin{array}{rl}
 & 3+0-2 \\
\cline{2-2}
2-1 & \big)\,6-3-4+2 \\
 & 6-3 \\
\cline{2-2}
 & -4+2 \\
 & -4+2 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ $(6x^3+2-3x^2-4x)\div(2x-1)=3x^2-2$.

上面二个例子中，例1的A式除以B式结果有余式，我们就说A式不能被B式整除。例2的A式除以B式结果没有余式，亦即余式为零，我们就说A式能被B式整除。

下面介绍因式和因式分解的概念。

如果一个多项式能被另一个多项式整除，那么后者称为前者的因式。根据这个定义可知，欲使F式为A式的一个因式，充分且必要的条件是：

（1）F和A必须是多项式；

（2）A式可以化为$A=GF$的形式，其中G也是多项式。

例如：因为$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，所以$(a+b)$和$(a-b)$都是a^2-b^2的因式。在实数范围内，因$2x^2-3y^2=(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y)(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)$，故$(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y)$和$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)$都是$2x^2-3y^2$的因式。

在$x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$中，若把$x^2-y$视为关

于x、y的多项式，则$(x+\sqrt{y})$和$(x-\sqrt{y})$不是x^2-y的因式，因$(x+\sqrt{y})$和$(x-\sqrt{y})$不是多项式；若把x^2-y视为关于x的多项式，则$(x+\sqrt{y})$和$(x-\sqrt{y})$是x^2-y的因式。

一个多项式如果除它本身外别无其它因式，这多项式称为**既约多项式**（或质多项式）；如果有不同于本身的其它因式，这多项式称为**可约多项式**（或复多项式）。显然，系数和常数项没有公因数的一次多项式必是既约多项式。

多项式是既约还是可约，还跟数域有关．例如：x^2-2在有理数范围是既约的，但在实数范围则是可约的，因为$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. x^2+2在实数范围是既约的，但在复数范围是可约的，因为$x^2+2=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$，

把一个多项式分成几个既约多项式的乘积，叫做**因式分解**．根据这个定义，可知：

1.因式分解是对多项式而言的，分解出来的因式也必须是多项式；

2.各个因式必须是既约的．也就是说，分解得的因式若是可约，还要继续分解下去，直到每个因式都是既约为止。

注：按惯例，如果没有表明数域，一般是限于有理数范围．如现行初中课本因式分解一章就是这样．本书也按这个规定．

例3：把x^4-4分解因式。

解：$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$.

例4．在实数范围内把x^4-4分解因式．

解：
$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$$
$$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

例5．在复数范围内把x^4-4分解因式．

解： $x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$

$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$。

顺便提出，例 3 的因式分解是不是还有 $-(x^2+2)(2-x^2)$、$2(\frac{1}{2}x^2+1)(x^2-2)$、$4(\frac{1}{2}x^2+1)(\frac{1}{2}x^2-1)$ 等等不同的结果呢？这些结果本质上是相同的，不能说成是“不同的结果”．在某种需要的情况下，可以将某些因式恒等变形为所需要的形式．

上面提到的多项式、因式、因式分解的概念和有关知识，主要是为因式分解打好基础，同时也是为了保证因式分解的唯一性。

练　习　1

1．判断正误（正确的在题后的括号内画“√”，错误的画“×”）：

（1）多项式能被任何有理数整除。（　）

（2）$\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}x-\frac{\sqrt{5}}{2}$是多项式。（　）

（3）$\frac{2}{x}+3$是关于x的多项式。（　）

（4）x^2+7-3x是$7x^3+58x-21-24x^2$的因式。（　）

（5）把a^2-b^2+1分解因式的结果是$(a+b)(a-b)+1$。（　）

（6）在实数范围内，$(\sqrt{5}x-\sqrt{7}y)$和$(\sqrt{5}x+\sqrt{7}y)$都是$5x^2-7y^2$的因式。（　）

（7）若$a-b^2$是关于b的多项式，则$(\sqrt{a}+b)$和$(\sqrt{a}-b)$是$a-b^2$的因式。（　）

（8）若$a-b^2$是关于a、b的多项式，则$(\sqrt{a}+b)$和$(\sqrt{a}$

$-b$）是$a-b^2$的因式。（ ）

（9）a^2+5在实数范围是可约的。（ ）

（10）a^2+5在复数范围是可约的。（ ）

（11）a^4-1分解因式的最后结果是$(a^2+1)(a^2-1)$。（ ）

（12）x^4-1在复数范围分解因式的结果是$(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$。（ ）

2. 选择题（每小题给出四种答案，其中有若干个答案是正确的，把所有正确的答案的代号填在题后的括号内）：

（1）$x^3+6x^2+11x+6$的因式是（ ）。

A. $x+3$；B. $x-3$；C. $x+2$；D. $x+1$。

（2）$x^3-12x^2+47x-60$的因式是（ ）。

A. $(x-3)$；B. $(x+3)$；C. $(x-4)$；D. $(x-5)$。

（3）$3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$的因式是（ ）。

A. $(x-1)$；B. $(3x^2+2)$；C. $(x-3)$；D. $(x+1)$。

（4）$2x^3+x^2+x-1$的因式是（ ）。

A. $(2x+1)$；B. $(2x-1)$；C. (x^2+x+1)；D. (x^2-x+1)。

（5）$4x^4-4x^3+5x^2-8x-6$的因式是（ ）。

A. $(2x+1)$；B. $(2x-3)$；C. (x^2+2)；D. $(2x-1)$。

（6）$\frac{x^3}{2}+\frac{14}{3}x^2+\frac{23}{2}x+\frac{10}{3}$的因式是（ ）。

A. $(3x+1)$；B. $(x+5)$；C. $(x+4)$；D $(x-4)$。

二、因式分解的方法

由于多项式的次数、元数以及系数的复杂性，不可能有一个统一的一般方法把任意一个多项式进行彻底的因式分解．下面所述的各种因式分解方法都是有一定的特殊性和局限性的，但是在解决具体的问题时这些方法往往有重要的作用．

（一）提公因式法

这是应用乘法分配律于因式分解的方法，就是当多项式的各项有共同的因式时，原式添加括号后，把共同的因式提取到括号外边去．

所提取的公因式必须是最高公因式．例如$2xy^3-4x^2y^2+8x^3y^3$中应提取$2xy^2$，$2xy$虽然也是公因式，若仅提取$2xy$，则括号内尚有公因式y，这就成为分解不完全．提取公因式的过程中，要注意正确运用同底数的幂的乘、除法则．添加括号时，要注意添括号的法则．例如：$2(a+b)(x-y)-x+y=2(a+b)(x-y)-(x-y)=(x-y)(2a+2b-1)$．

多项式提取公因式后，剩下的另一因式，必须化简，如合并同类项等．

提取公因式是因式分解首先考虑的方法．

例 1．把$3ab^4-9a^2b^2+15a^3b^3$分解因式．

解： 原式$=3ab^2(b^2-3a+5a^2b)$．

例 2． 把$3x(x-2y)+2y(2y-x)$分解因式．

解： 原式$=3x(x-2y)-2y(x-2y)$

$$=(x-2y)(3x-2y).$$

例 3． 把$3x^2y(x^2-y)+6x^3y(x+y)$分解因式．

解： 原式$=3x^2y[(x^2-y)+2x(x+y)]$

$$=3x^2y(3x^2-y+2xy).$$

例 4． 把$6(a-b)^2(5x-3y)-3(b-a)^2(x-5y)$分解因式．

解： 原式$=6(a-b)^2(5x-3y)-3(a-b)^2(x-5y)$

$$=3(a-b)^2[2(5x-3y)-(x-5y)]$$

$$=3(a-b)^2(10x-6y-x+5y)$$

$$=3(a-b)^2(9x-y).$$

注： 改变括号内所有各项的正负号时，如果括号外的幂指数是奇数，则括号前的正负号要改变．如果括号外的幂指数是偶数，则括号前的正负号不变（如上例）．

练　习　2

一、判断正误：

1．$-2x^3+6y=-2(x^3+3y)$．（　）

2．$-3x^2+9xy^2=-3x(x-3y^2)$．（　）

3．$(3x-8y)^3=(-3x+8y)^3$．（　）

4．$(4x^2-5y)^4=-(-4x^2+5y)^4$．（　）

5．$(-5x+4y^2)^4=-(-5x+4y^2)^4$．（　）

6．$(-5x+4y^2)^4=(5x-4y^2)^4$．（　）

7．$(5x-8y^2)^{100}=(-5x+8y^2)^{100}$．（　）

8．$(-3x^2+2y^2)^{99}=-(3x^2-2y^2)^{99}$．（　）

二、把下列各式分解因式：

1. $3x^2-6xy-9x$。

2. $12a^2+9ab-6ac$。

3. $5bx-10b^2x-15bx^3$。

4. $3a(3x-2y)-4a(x-2y)$。

5. $5(p-2q)(4x-y)-(2q-p)(x+y)$。

6. $3(a+2b)(2x-y)+2x-y$。

7. $(a+b)(x-2y)-x+2y$。

8. $a-b+(3x+6y)(b-a)$。

9. $(a-b)^2-(b-a)^2(3x-y)$。

10. $(a-b)^3-(b-a)^3(3x-y)$。

11. $m(3n-2)+p(3n-2)-3n+2$。

12. $(a+b-c)(3x-4y)-(c-a-b)(x+y)-(a+b-c)(x-2y)$。

13. $(m-a)^2+3x(m-a)-(x+y)(a-m)$。

14. $(x+2)(x-3)(x^2-7)+(2+x)(3-x)(x+3)$。

15. $(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)$。

16. $(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-x-y)$。

17. $\frac{15}{63}x^3y^2-\frac{10}{63}x^2y^3$。

18. $10x^{m+2}+5x^2$。

19. $3a^m-9a^{m+1}$。

20. $4b^{m+3}-8b^3-12b^{3+n}$。

（二）运用公式法

常见的乘法公式有：

两项平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；