中学教学参考丛书

排列 组合和二项式定理

于 忠 文编

山东人民出版社

中学教学参考丛书

排列 组合和二项式定理

于 忠 文编

山东人民出版社
一九七八年·济南

中学教学参考丛书

排列 组合和二项式定理

于 忠 文编

*

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 3.25印张 68千字
1978年11月第1版 1978年11月第1次印刷
印数：1—172,000

书号 7099·880 定价 0.28元

前　　言

为搞好数学教学，提高教学质量，适应实现四个现代化的需要，根据新编全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）的要求，编写了这本小册子．以供中学数学教师教学参考．

在编写中，力求抓住排列、组合和二项式定理的重点和难点，结合教学中容易出现的主要问题，着重阐明排列、组合和二项式定理的概念和基础知识．通过对具体问题的分析，讲清概念的实质、概念和运算之间的关系、解题的规律．同时，在此基础上，适当介绍不尽相异元素的全排列、有重复的排列、环状的排列、有重复的组合等方面的内容。

但因水平所限，可能存有一些缺点和错误，恳切期望读者批评指正。

一九七八年八月

目　录

一 排 列

（一）排列的定义

在工作和生产劳动中，我们常常遇到这样一些问题：比如，7个体育项目分别举行比赛，地点从10个城市中选择，共有几种方案，某城市的电话号码使用6位数字，最多可以安装多少台不同号码的电话机？以及劳力的安排，物资的调配等等．在数学上，都属于我们要学习的排列问题．那么，什么叫做排列呢？我们可以对下面两个具体问题进行分析，得出它的定义．

例1． 某学校要安排甲、乙、丙3个班的学生去参观阶级教育展览会和科学研究成果展览会，总共可有多少种不同的安排法？

3·2

分析：这个问题，只要我们选排一下，就比较清楚了．从甲、乙、丙3个班里，选一个班参观阶级教育展览会的方法有3种(可安排甲班，也可以安排乙班或安排丙班)．不论先安排哪一个班参观，再安排另一个班参观科学研究成果展览会的方法就有2种．例如，安排甲班参观阶级教育展览会后，再安排一个班参观科学研究展览会的，不是乙班，就是丙班：

$$\begin{cases}\text{甲}\\\text{乙},\end{cases}\qquad\begin{cases}\text{甲}\\\text{丙};\end{cases}$$

如果先安排乙班或者丙班参观阶级教育展览会，和上面

的方法一样，可以分别作出另外 2 种不同的安排：

$$\begin{cases}\text{乙}\\ \text{甲，}\end{cases}\quad \begin{cases}\text{乙}\\ \text{丙；}\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{丙}\\ \text{甲，}\end{cases}\quad \begin{cases}\text{丙}\\ \text{乙。}\end{cases}$$

总之，甲、乙、丙 3 个班参观两个展览会，可作出如下 6 种不同的安排：

$$\begin{cases}\text{甲}\quad\text{甲}\\ \text{乙，丙；}\end{cases}\quad \begin{cases}\text{乙}\quad\text{乙}\\ \text{甲，丙；}\end{cases}\quad \begin{cases}\text{丙}\quad\text{丙}\\ \text{甲，乙。}\end{cases}$$

从以上可以看出，这 6 种安排是各不相同的，并且除此 6 种安排外，不可能再作出其他不同的安排．

例2． 从三个不同的数字 3 、 5 、 7 里，每次取出两个不同的数字排列起来，一共可以组成多少个两位数？

P_3^2 分析：从 3 个不同数字 3 、 5 、 7 里，每次取出两个不同的数字排成两位数，也就是安排十位和个位上的数字能有几种方法．

很明显，十位上的数字可以是 3 ，可以是 5 ，也可以是 7 ，因此，从 3 个不同数字 3 、 5 、 7 里，取出一个放在十位上有 3 种方法．排定好十位上的数字以后，再取一个数字排在个位上有 2 种方法．例如，把 3 排在十位上，那么，个位上的数字可以是 5 ，也可以是 7 ．依此方法再把 5 或 7 排在十位上，在个位数字上还能各有 2 种排法，所以这三个数字可组成如下 6 个不同的两位数（如图 1 ）：

35，37，53，57，73，75．

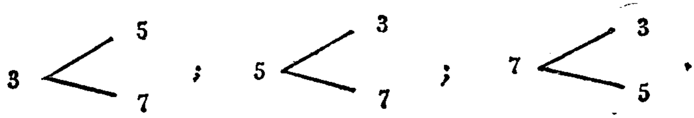

图 1

在问题中，我们把具有一定数量的事物对象称做元素．如，例 1 里的甲班、乙班、丙班就是 3 个不同的元素；例 2 里的 3 个不同数字 3 、 5 、 7 也是 3 个不同的元素．

上面所谈的两个例题，虽然所研究的问题不一样，但却有着一个共同的特点，都是要求从 3 个不同的元素里，每次取出 2 个不同的元素，按照一定的顺序摆成一排、求出共有多少种不同的方法．或是从一些元素中，每次取出几个元素，按照一定的顺序摆成一排的问题．因此，凡是从一定数量的不同事物中，选出若干个来，依照某一种顺序并列在一起，就叫排列．若是从 m 个元素里，每次取出 n 个元素，按照一定的顺序摆成一排，就叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列．

根据以上定义，例 1 中的每两个班，例 2 中的每一个两位数，都是从 3 个元素里每次取出 2 个元素的一个排列．

从以上两个问题中，我们可以看出：

1．在 m 个元素、n 个元素中，m 和 n 都是正整数．

2．从 m 个元素里每次取出 n 个元素的一个排列，必须要做到以下两点：要取出 n 个元素；并按照一定的顺序摆成一排．

3．在排列中，如果所含的元素不同，或所含元素相同而顺序不同，都是不同的排列；只有元素相同，顺序也相同的排列，才是相同的排列，或者说是同一个排列．

例如，从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列是：

$$ab,\ ac;\ ba,\ bc;\ ca,\ cb.$$

排列 ab 和 ac,所含的元素不完全一样；排列 ab 和 ba，所含的元素完全相同，而排列的顺序不同，都是两个不相同的排列．如果有排列 ab 和 cb，元素相同，顺序一样，就是相同的排列．

在排列里，如果 $m>n$，这样的排列叫做选排列．即：从 m 个元素里，每次取出 n $(m>n)$ 个元素，按照一定的顺序摆成一排，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的选排列．如上面的例 1 和例 2 都是选排列的问题．

如果 $m=n$，这样的排列叫做全排列．即：从 m 个元素里，每次取出 n $(m=n)$ 个元素，按照一定的顺序摆成一排，叫做 m 个元素的全排列．

全排列也可以看作是选排列的特殊情况，相同的是都要按照一定的顺序摆成一排；不同的是选排列每次只取一部分元素，全排列每次取出所有的元素．

（二）排列的写法

在实际工作中，常常要求我们写出某个排列问题的所有不同的排列．那么，怎样写才能做到不重复，不遗漏呢？我们通过下面的例题进行具体介绍．

例如，从 4 个元素 a、b、c、d 中每次取出 1 个元素的排列写法是：

$$a;\ b;\ c;\ d.$$

从 4 个元素 a、b、c、d 中每次取出 2 个元素的所有不同的排列写法是：

第一个位置上的元素有 4 种写法．我们可以把 a、b、

c、d 任意一个元素写在第一个位置上，既可以写 a，也可写 b 或 c 或 d；第一个位置上的元素写好后，第二个位置上的元素的写法就有 3 种．例如，第一个位置上写元素 a，那么第二个位置上就只能写 b、c、d 三个元素，即：ab，ac，ad．如果，第一个位置上写元素 b，那么，第二个位置上就只能写元素 a、c、d 三个元素，即：ba，bc，bd．如果，第一个位置上写元素 c，那么，第二个位置上就只能写 a、b、d 三个元素，即：ca，cb，cd．第一个位置上写元素 d，那么，第二个位置上就只能写元素 a、b、c 三个元素，即：da，db，dc．

从图 2 中可以清楚地看出，从 4 个元素 a、b、c、d 中每次取出 2 个元素所有不同的排列是：

$$
\begin{aligned}
&ab,\ ac,\ ad;\\
&ba,\ bc,\ bd;\\
&ca,\ cb,\ cd;\\
&da,\ db,\ dc.
\end{aligned}
$$

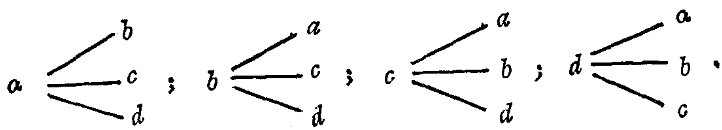

图 2

假如从 4 个元素 a、b、c、d 中每次取出 3 个元素的所有不同排列，它的写法和从 4 个元素中每次取出 2 个元素的所有不同排列的写法是一样的，都是要按照从左到右的顺序

逐个写出 3 个元素．

我们从图 3 中就可以清楚地看出，从 4 个元素 a、b、c、d 中每次取出 3 个元素的所有不同排列是：

abc，abd，acb，acd，adb，adc；

bac，bad，bca，bcd，bda，bdc；

cab，cad，cba，cbd，cda，cdb；

dab，dac，dba，dbc，dca，dcb．

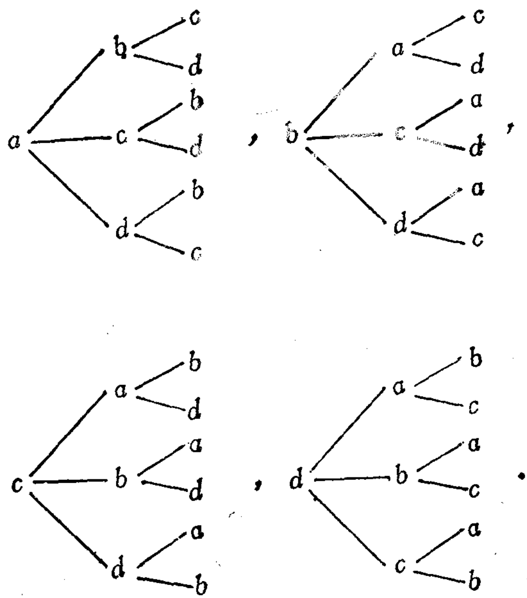

图 3

用同样的方法，我们也可以写出全排列的所有的不同排列．

我们熟练地掌握了以上写法后，不仅可以在写出某个排列问题的所有不同排列时不会重复和不遗漏，而且还有以下好处：

1.在实际工作中，常常需要写出某一个问题的所有不同排列，因此，有一定的实用价值；

2.能进一步掌握排列的规律，找出选排列与全排列（排列与组合）的异同点；

3.对推导排列数公式，能起到直观的启示作用；并能提高分析应用题的能力.

（三）加法原理和乘法原理

对排列问题，主要是根据已知条件求出所有不同排列的种数. 对一些简单的问题，可以采用例 1 和例 2 中的方法，把所有不同的排列都列举出来. 但是，如果问题比较复杂、数字比较大时，用这种方法就很麻烦. 因此，可用加法原理和乘法原理，直接求出排列种数.

先看下面的问题：

例1. 一位同学从他的家乡到南京求学，乘火车、汽车、轮船都可以直达. 一天中，火车有 3 班，汽车有 4 班，轮船有 2 班，问乘不同班次的车或船，一共有几种走法？

问题是很明显的. 因为从某地无论乘坐火车、汽车或轮船，都可以直达南京. 火车有 3 班，因此乘火车就有 3 种走法；同样道理，乘汽车有 4 种走法；乘轮船有 2 种走法. 所以，这位同学从某地到南京的走法是乘火车、汽车、轮船走法的和，即：

$$3+4+2=9\text{（种）}.$$

从这个问题的解答中，启发我们得出下面的结论：

如果完成一件事有几种方式，第一种方式有 m 种方法，第二种方式有 n 种方法，第三种方式有 p 种方法……，最后一种方式有 r 种方法，其中任何两种方法都不相同，而且不论通过哪种方法，都可以完成这件事，那么完成这件事总共有：

$$m+n+p+\cdots\cdots+r$$

种方法．或者说：直接完成某一件事总的方法种数，等于所有可能直接完成这一件事的方法种数的总和．我们把这个结论称为加法原理．

例2． 从甲站到丙站必须经过乙站．已知从甲站到乙站有 3 条路，从乙站到丙站有 2 条路，问从甲站到丙站共有多少种不同的走法？

从图 4 中看出，由甲站到乙站有 $A \longrightarrow B$，$E \longrightarrow F$，

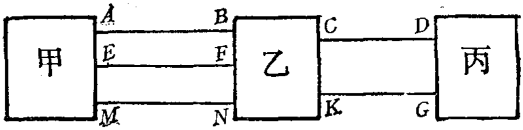

图 4

$M \longrightarrow N$ 3 种走法．每选定一种走法到达乙站后，再由乙站到丙站又有 $C \longrightarrow D$，$K \longrightarrow G$ 2 种走法．因此，从甲站到丙站共有 6 种走法．走的路线是：

$\overrightarrow{ABCD}$，$\overrightarrow{ABKG}$，$\overrightarrow{EFCD}$，$\overrightarrow{EFKG}$，$\overrightarrow{MNCD}$，$\overrightarrow{MNKG}$．

这个问题的道理，可以这样去考虑：要完成从甲站到丙站这件事，必须通过几个步骤，也就是说，要完成这件事，必须先完成第一步：从甲站到乙站，再完成第二步：从乙站到丙站.现在，完成第一步有 3 种方法，不论用哪一种方法完成第一步以后，再去完成第二步，都有 2 种方法，那么，要完成从甲站到丙站这件事，总共有：

$$3 \times 2 = 6$$

种方法．把这个道理加以推广，可以得到下面的结论：

完成一件事，有几个步骤，第一步有 m 种方法，第二步有 n 种方法……，最后一步有 r 种方法，必须通过每一个步骤才算完成这件事，那么，完成这件事总共有：

$$m \cdot n \cdots\cdots r$$

种方法．或者简单地说：若某一件事物须依次分段完成，则完成此事物的方法总数为完成各段的方法数之积．我们把这个结论称为乘法原理．但是，乘法原理与加法原理不同，在乘法原理中，m、n、……r 种方法彼此是依次连续的，必须通过每一个步骤，才算完成这件事．

（四）排列数的公式

1.排列数的符号

我们从 m 个元素里，每次取出 n 个元素的所有不同的选排列种数，也简称为排列数，常用符号 A_m^n 表示（A 是拉丁字 *Arrangement* 的第一个字母）．

m 个元素所有全排列的种数，常用符号 P_m 表示（P 是拉丁字 *Permutation* 的第一个字母）．$P_m = A_m^m$.

A_m^n 是代表选排列的种数；P_m 是代表全排列的种数，都不能误解为排列，或是从 m 个元素里，每次取出 n 个元素的所有排列。

例如，"从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的排列"，这句话是指：从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素，按照一定的顺序摆成一排；"从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素所有不同的排列"是指：ab，ac，ba，bc，ca，cb．而"从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列种数"是指 $A_3^2=6$．A_3^2 是表示排列数 6 的．

2．计算 A_m^n 、P_m 的公式

前面我们已经介绍了，写出从 m 个元素中每次取出 n 个元素的所有不同的方法．但是，当 m、n 比较大的时候，要把所有不同的排列写出来是相当困难的，在一般情况下，常常是只要求我们计算出某一排列中所有不同的排列种数，而不需要写出所有的排列来，因此，推导出计算 A_m^n 、P_m 的公式来，就方便多了．今将推导计算 A_m^n、P_m 公式的步骤介绍如下：

如，设有 m 个元素 a、b、c、d、e、……、k、l．

（1）从 m 个元素里每次取出一个元素的排列的种数，显然是 m 个，即：

$$A_m^1=m.$$

（2）从 m 个元素里每次取出 2 个元素的排列是：

$$m\text{列}\begin{cases} ab, ac, ad, \cdots\cdots, ak, al; & (m-1\text{ 个排列}) \\ ba, bc, bd, \cdots\cdots, bk, bl; & (m-1\text{ 个排列}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ la, lb, lc, \cdots\cdots, lk. & (m-1\text{ 个排列}) \end{cases}$$

所有的排列种数是：

$$A_m^2=m\ (m-1)\ .$$

（3）从 m 个元素里每次取出 3 个元素的排列是：

$$m(m-1)列\begin{cases}abc,abd,\cdots\cdots,abk,abl;\ (m-2个排列)\\ acb,acd,\cdots\cdots,ack,acl;\ (m-2个排列)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ lka,lkb,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\ (m-2个排列)\end{cases}$$

所有的排列种数是：

$$A_m^3=m\ (m-1)(m-2)\ .$$

（4）从 m 个元素里每次取出 4 个元素的排列是：（把每次取 3 个元素的每一个排列添上一个不同的元素）

$$m(m-1)(m-2)列\begin{cases}abcd,abde,\cdots\cdots abkl(m-3个排列)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ lkab,lkbc,\cdots\cdots\cdots\cdots\ (m-3个排列)\end{cases}$$

所有的排列种数是：

$$A_m^4=m(m-1)(m-2)(m-3).$$

以此类推，可以得到：

$$A_m^5=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把上面的式子推广到一般，即有：

$$\begin{aligned}A_m^n&=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots[m-(n-1)],\\ &=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1).\qquad 公式\mathrm{I}\end{aligned}$$

我们将上式称为排列数公式．其中 m、n 都表示自然数，并且 $m\geqslant n$．这个公式指出：从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有的排列种数，等于 n 个连续自然数的积，其中最大的一个数是 m。