中小学教师参考丛书

初中数学竞赛同步辅导

主编 翟连林 赵学恒

光明日报出版社

中小学教师参考丛书

初中数学竞赛同步辅导

主　编　翟连林　赵学恒

编　者　戴邦毅　龚智发　官保国

周步俊　卢振甫　周维华

光明日报出版社

（京）新登字101号

初中数学竞赛同步辅导

翟连林　赵学恒　主编

☆

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

邮政编码：100050

电话：3017733-225

新华书店北京发行所经销

北京通县向阳印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　印张9.75 字数215千字

1993年2月　第1版　1993年2月　第1次印刷

印数：1—5,500册

ISBN 7-80091-367-8/G·571

定价：4.85元

前　言

自1985年我国第一次参加国际数学奥林匹克(IMO)以来，我国选手的成绩、名次不断上升．在1989年第30届IMO中，我国队异军突起，团体总分跃居第一，六名同学获得4枚金牌，2枚银牌．特别是1990年在我国举行的第31届IMO中，我国队又以230分的总成绩一举夺魁，与总分193分的第二名原苏联队相比，成绩遥遥领先，获得金牌5枚，银牌1枚．参赛者中共有4人满分，其中就有两名是中国队员．这极大地鼓舞了中国数学工作者、数学教师，特别是广大的中学生热爱数学、研究数学、学习数学的积极性，使蓬勃开展的数学竞赛热潮在“普及的基础上不断提高”的方针指引下更加稳步和深入，各级各类的数学课外兴趣小组和数学奥林匹克学校相继建立，各种层次和各种形式的数学竞赛广泛举行．这使得广大的中学师生急需能够适应各种层次、针对各级竞赛，又与日常教学相结合的数学竞赛辅导材料．为此，我们通过对国内外，特别是国内近几年来各级各类数学竞赛几百套试题的研究，并结合我们长期任教中学数学和参加数学竞赛辅导以及参加有关数学竞赛命题的经验和体会，编写了本书．

本书以现行初中数学统编教材(人教版)编排顺序，结合教学进度，按最新中学数学教学大纲的要求，参照初中数学竞赛大纲，在植根于现行教材、强化双基训练的基础上，介绍解题方法和技巧，渗透数学竞赛所涉及的知识，着眼于数学思维能力的培养和提高，覆盖了初中数学教材和竞赛大纲要求的全部内容．

全书力求实用，与教学同步，共分二十一讲，除提炼和深化教材内容的十五讲外，还在每年寒暑假各安排了一讲冬令营和夏令营，主要介绍教材没有或比较薄弱、而在竞赛大纲中又作了要求的有关内容．各讲均按“内容介绍”、“考查知识点”、“典型例题分析”、“训练题”四部分组成，并在各讲冬令营和夏令营后配有一套测试题，用以检查本学期所学竞赛辅导知识，具有针对各年级数学竞赛的作用．最末一讲是全国历届初中数学竞赛考查知识点分析，侧重对历届全国初中数学联赛试题所考查的知识点作了比较科学而又客观的分析统计，并幅射各级各类的各种数学竞赛，指明了初中数学竞赛所考查的主要知识内容及其重点、难点和倾向，提出了初中数学竞赛辅导与训练需要加强和重视的一些类型．最后配有一套初中数学竞赛模拟试题．

全书共有典型例题273个，其中140余个选自各种数学竞赛试题，其余例题多是由各种竞赛题改编，具有很强的实用性，每个例题都有分析，有略解(证)，每个类型有小结．全书选编训练题215个，具有很大的针对性．全书共给测试题和模拟题77个，具有浓厚的竞赛试题风格和特色．书末附有全部训练题、测试题和模拟题的答案或略解．

诚然，尽管我们力求使本书以初中数学知识为基础，逐步渗透竞赛数学内容，最终形成竞赛技能，使知识与能力并重、普及与提高兼顾，成为一部受师生喜爱、实用的好书，但由于我们水平和经验的不足，以及资料的局限，书中不当和错漏之处难免，恳请同行和广大读者批评指正．

编　者

1992年12月

内 容 提 要

本书紧密配合教学进度，在植根于现行初中数学教材、强化双基训练的基础上，逐步渗透各年级初中数学竞赛所涉及的知识，共二十一讲．是教师进行同步数学竞赛辅导和学生深化教材、参加各级数学竞赛自学训练的实用读物，也可作各级奥林匹克学校初中数学同步辅导的教材．

目　录

第一讲　有理数中重要概念及运算技巧

内容介绍：有理数的概念和有理数的运算技巧是本讲的重点内容．绝对值、相反数、倒数是有理数中最重要的概念，这些概念是有理数运算的基础．熟练掌握有理数大小比较方法，有理数的符号法则、运算法则、运算顺序、运算律，是迅速而又准确地进行有理数运算的关键．

考查知识点：有理数中重要概念及应用，有理数的运算技巧．

典型例题分析

例1　方程$|x+1991|+x+1991=0$的解有（　　）

(A) 1个；(B) 2个；(C) 无数个；(D) 以上都不是．

分析：这是一个绝对值方程，一般应分段讨论求解，但根据方程结构，用绝对值的概念来处理十分简单．

略解：由已知，得$|x+1991|=-(x+1991)$．

$\therefore$　$x+1991\leqslant 0$，即　$x\leqslant -1991$，

故　原方程有无数个解，应选C．

例2　如果一个数和它的倒数，相反数比较，总是这个数大，那么（　　）

(A) 这个数是大于1的正数；

(B) 这个数是正的真分数；

(C) 这个数是负的假分数；

(D) 这个数是负整数．

分析：选择题的解法较多，但解题时要因"题"制宜，题目中的"一个数"是未知的，因此可以采用直接求解对照答案.

略解：设这个数是a，

$\because\ a>-a$，$\therefore\ a>0$，

又$\because\ a>\dfrac{1}{a}$，$\therefore\ a>1$，

故 应选A.

例3 如果$x<-2$，那么$|1-|1+x||$等于（ ）

(A) $2+x$；(B) $-2-x$；(C) x；(D) $-x$.

分析：由绝对值的概念知道，含字母的代数式要去掉绝对值符号时，需要分情况讨论.

略解：$\because\ x<-2$，$\therefore\ 1+x<0$，$2+x<0$，

$\therefore\ |1+x|=-x-1$.

$\therefore$ 原式$=|1-(-x-1)|=|2+x|=-2-x$.

故 应选B.

小结：以上三个例题，都是运用有理数中绝对值、倒数、相反数的概念解题的范例，利用概念解题是数学中基本的方法之一，应当重视.

例4 计算：$\left[2.5-\left(0.375+\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{4}\right)\times 24\right]\div 5$

$\times(-1)^{1991}$.

分析：作混合运算题时，通常化小数为分数，分段同时运算，灵活使用运算律进行简便计算.

略解：原式$=\left[\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{4}\right)\times 24\right]\div 5\times(-1)$

$$=\left[\frac{5}{2}-(-5)\right]\div 5\times(-1)=-1\frac{1}{2}.$$

小结：在计算过程中，先不要急于动笔，要根据题目特点思考，寻求简便方法，然后再计算，在以后的计算中同样要注意这一点．

例5 计算：$\left|2\frac{29}{31}-3\frac{5}{7}\right|+\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}}$．

分析：本题看来繁琐，但有理数的绝对值是一个非负数，∴ $\left|2\frac{29}{31}-3\frac{5}{7}\right|=3\frac{5}{7}-2\frac{29}{31}$．对于繁分数通常利用分数的基本性质来化简，将分子分母同乘以12．

略解：原式$=3\frac{5}{7}-2\frac{29}{31}+\dfrac{12\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)}{12\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\right)}$

$$=3\frac{5}{7}-2\frac{29}{31}-3\frac{5}{7}=-2\frac{29}{31}.$$

小结：通过本题进一步加深对绝对值概念的理解．注意利用分数的基本性质作运算，这种方法很重要，要加强练习，同时要把分子分母看成整体，特别注意不要漏乘．

例6 计算：$\left(5\frac{1}{3}+\dfrac{2\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}}\right)$

$$\times\frac{1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}}{5\frac{1}{3}\left(1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}\right)+2\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}}.$$

分析：本题如果按有理数的一般方法计算，显得相当麻烦，只要注意到题中的数可以分为三个部分：

$5\frac{1}{3}$，$2\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}$，$1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}$，因此采用换元法来计算.

略解：设 $A=5\frac{1}{3}$，　$B=2\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}$，　$C=1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}$.

则

$$原式=\left(A+\frac{B}{C}\right)\times\frac{C}{AC+B}$$
$$=\frac{AC+B}{C}\times\frac{C}{AC+B}=1.$$

小结：本题解法简单明快，值得借鉴．当一个题目较复杂时，应该先观察特点，如果相同式子较多时，采用换元法可以大大减少运算量.

例7　比较1991×20002000与2000×19911991的大小.

分析：两个数比较大小，若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b=0$，则$a=b$；若$a-b<0$，则$a<b$，这样比较两个数的大小，只需求两个数的差就能判断了.

略解：$1991\times20002000-2000\times19911991$

$=1991\times2000\times10001-2000\times1991\times10001$

$=0$，

$\therefore$　$1991\times20002000=2000\times19911991$.

小结：这种方法叫做作差比较法，这是两数比较大小的常用方法之一，在很多时候能显示出它的优越性.

例8　计算：$\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-2\frac{5}{19}\times\frac{19}{43}\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$

$$+0.8^2\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3+2^3\div\left(-\frac{2}{3}\right)^3.$$

分析：这是一个混合运算题，按运算顺序来计算，运算量较大，但注意到式子中每项都含有$\left(-\frac{3}{2}\right)^3$，所以逆用乘法分配律来计算.

略解：原式$=\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{43}{19}\times\frac{19}{43}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+2^3\right]$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times2^3=-27.$$

小结：改变运算程序，逆用运算律时，要注意运算过程的特点，把运算过程看作是思维的过程，分配律的倒用即$ab+ac-ad=a(b+c-d)$，这是巧算的重要方法.

例9 计算：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{17\times19}+\frac{1}{18\times20}$.

$\frac{1}{1\times2}+-$

分析：要求式中18个分数的和，显然不能去通分，这就需要寻求简便方法. 式子中的分母是相邻两个奇数，或两个偶数的积，而$\frac{1}{(n-2)n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$，利用这个公式来计算该题就化繁为简.

略解：原式$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$

$$=\frac{531}{760}.$$

小结：这种方法叫做裂项求和法，在求某些特殊形式的和时常常用到，裂项公式较多，如：$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}$，$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，这些公式都能将一项裂为两项，而且一正一负，求和时可错项抵消，达到简化运算之目的.

例10 计算：$\frac{666666\times666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$.

分析：这个算式整齐、匀称，使人对它感兴趣，但直接计算运算量太大，当然不能用死办法计算. 仔细观察，分母运用加法交换律和结合律很容易算出来，再与分子约分即得.

略解：

$$原式=\frac{666666\times666666}{(1+5)+(2+4)+(3+3)+6+(4+2)+(5+1)}$$

$$=\frac{6\times111111\times6\times111111}{6\times6}$$

$$=111111\times111111=12345654321.$$

小结：这个答案，仍然具有整齐、匀称的特点，使人猜想是否具有规律性，其实将上述算式改动一下数字，会有类似结果. 如

$$\frac{999999999\times999999999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$=12345678987654321.$$

一般地，有$\dfrac{\overbrace{aa\cdots a}^{a\text{个}}\times\overbrace{aa\cdots a}^{a\text{个}}}{1+2+3+4+\cdots+a+\cdots+3+2+1}$

$=12\cdots a\cdots 21$.

(其中a是正整数，且$2\leqslant a\leqslant 9$).

训练题一

1. 填空题

(1) 一个数与它的绝对值的倒数相等，这个数是____________.

(2) 如果a、b、c均为非零有理数，则$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}$的所有可能值是____________.

(3) 若有理数a、b、c在数轴上的对应点如图 1-1 所示：则$|a+b|+|c-a|-|b-c|=$____________.

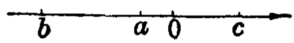

图 1-1

2. 选择题

(1) 下列说法正确的是（　　）

(A) 两个数互为相反数，这两个数必定异号；

(B) 一个数的绝对值一定不小于零；

(C) 任何数除零无意义；

(D) 一个数的倒数比它本身大，那么这个数的绝对值不大于1.

(2) 已知$|x-1|+|x-5|=4$,则x的取值范围是（　　）

(A) $1\leqslant x\leqslant 5$;　　(B) $x\leqslant 1$;

(C) $1<x<5$;　　(D) $x\geqslant 5$.

3. 当$x<-1$时，化简：$|1+|1+|1+x|||$.

4. 计算：　$-1\frac{3}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}\right)+\frac{5}{8}\right]$.

5. 计算：　$\left(\frac{17}{76}-\frac{16}{93}\right)\times\left[0.5^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]-\left[2\frac{1}{2}-24\times\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\right]\div(-3^2+8)\times(-1)^{1992}$.

6. 计算：　$0.25^2\div\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(11\frac{2}{8}+2\frac{1}{3}-13.75\right)\times 24-\frac{1}{(-0.2)^3}$.

7. 求值：　$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{1989\times 1990}+\frac{1}{1990\times 1991}$.

8. 计算：　$\dfrac{7\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}}{0.125\times\left(7\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}\right)+9\frac{6}{7}-2\frac{1}{5}}\times\left(0.125+\dfrac{9\frac{6}{7}-2\frac{1}{5}}{7\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}}\right)$.

第二讲　数字计算技巧

内容介绍：数字计算是很常见的计算，也是最基本的和最重要的计算．数字计算不只依据四则运算法则，常常要运用技巧，而这种数字巧算来自于细心的观察和大胆地探索规律．数字计算技巧，机智性强，因此是数学竞赛的热点内容之一．

考查知识点：观察数字规律，进行巧算．

典型例题分析

例1　计算：$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{1991}\times1990$．

分析：不难看出这个算式的规律是：任何相邻两项之和为1或-1，若按1、2项，3、4项，…分组结合的方式计算就会得$\frac{1990}{2}=995$个-1．

略解：原式$=(1-2)+(3-4)+\cdots+(1989-1990)$

$$=-1\times\frac{1990}{2}=-995.$$

小结：本题解法巧妙地利用了加法结合律，运算简捷．事实上，本题也可用分组求和来解，即用加法交换律和结合律将原式变为：$(1+3+5+\cdots+1989)-(2+4+6+\cdots+1990)$来计算仍然十分简便．

例2　计算：$\underbrace{11\cdots1}_{1991个}\underbrace{22\cdots2}_{1991个}\div\underbrace{33\cdots3}_{1991个}$．

分析：看本题算式很难下手，但仔细观察就会发现