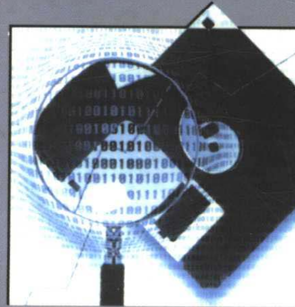

数学分析

朱 正 佑 编

SHUXUE FENXI

下册

上海大学出版社

上海大学面向21世纪教学改革教材

数学分析

（下册）

朱正佑　编

上海大学出版社

·上海·

内 容 提 要

本书是上海大学朱正佑和秦成林同志合编的《数学分析》的下册。内容包括瑕积分、级数理论、多元函数微分学和积分学、隐函数和多元函数极值理论及多元函数的积分理论。本书采用 Banach 空间的观点讲述了函数一致收敛和平均收敛的概念；采用 Hilbert 空间的观点讲述了三角级数收敛的概念；在曲线积分和曲面积分的阐述中，强调了有关的物理、力学背景和一些重要公式的物理意义。

本书可作为理工科大学和师范院校数学系、力学系本科生的教材，也可作为理工科其他专业本科学生学习高等数学的教学参考书，同时还可供从事数学分析、高等数学教学的教师以及数学系、力学系的研究生参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．下册/朱正佑编．— 上海：上海大学出版社，2001.7

ISBN 7-81058-315-8

Ⅰ．数… Ⅱ．朱… Ⅲ．数学分析－高等学校－教材 Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 032948 号

上海大学出版社出版发行

（上海市延长路 149 号 邮政编码：200072）

常熟市印刷八厂印刷 各地新华书店经销

开本 880×1230 1/32 印张 15.25 字数 434 000

2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

印数：1～1 050

定价：26.50 元

目　　录

注：若课时不够，书中加“ * ”处可以不讲

第八章　广义积分

在上一章定积分的讨论中，我们总假定积分区间的长度是有限的，而且被积函数是有界的。然而在实际应用和进一步的理论研究中都需要放宽这两个限制，即对无穷区间或无界函数进行定积分运算。本章讨论定积分在这两个方面的拓广。在§1中我们先讨论无穷区间上的定积分，然后在§2中讨论无界函数的定积分。

§1　无穷区间上的定积分

1.1　无穷区间上的定积分的定义

考察 $[1, +\infty)$ 区间上的函数 $y = \frac{1}{x^2}$。这个函数在 $[1, +\infty)$ 是恒正的连续函数。由定积分理论知，在$[1,b]$区间上 $(b \geqslant 1)$，由这个函数界定的曲边梯形的面积为

$$\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 - \frac{1}{b} \tag{1.1}$$

如果我们让 b 增大，这时曲边梯形的图形向右延伸，如图 8.1 所示。当 $b \to +\infty$ 时，由 (1.1) 知这个向右不断延伸的曲边梯形的面积以 1 为极限。因此，很自然地把 Oxy 平面上位于 $x = 1$ 右侧，x 轴上方和 $y = \frac{1}{x^2}$ 下方的图形的面积定义为这个极限 1。不过应注意并非

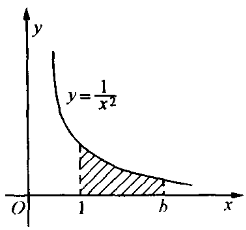

图 8.1

对任意在$[a, +\infty)$上的恒正、连续函数$f(x)$，即使满足$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，都会使极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在。例如，在$[1, +\infty)$上的函数$y = \frac{1}{x}$就是这样。实际上由

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$

因而平面Oxy上位于$x = 1$右侧，x轴上方和$y = \frac{1}{x}$下方的图形没有(有限的)面积。

现在抛开具体的“面积”的含义，假定$f(x)$在$[a, +\infty)$上有定义且对任意$b \geqslant a$，$f(x)$在$[a,b]$上可积。如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

存在，我们称它为函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上的广义积分，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

同时称广义积分是收敛的或$f(x)$在$[a, +\infty)$上是可积的。反之，若极限(1.2)不存在，则说广义积分(1.3)是发散的或$f(x)$在$[a, +\infty)$上是不可积的。发散的广义积分(1.3)不表示任何数。

在上面讨论中，积分下限总是不变的。现在反过来，设$f(x)$在$(-\infty, b]$上有定义，且对任意$a \leqslant b$，$f(x)$在$[a,b]$上可积。如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

存在，则我们把这一极限称为$f(x)$在$(-\infty, b]$上的广义积分，记为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

并称广义积分(1.5)是收敛的或 $f(x)$在 $(-\infty,b]$ 上可积;反之,则称广义积分(1.5) 是发散的或 $f(x)$ 在$(-\infty,b]$ 上是不可积。

最后,假设 $f(x)$在整个数轴上都有定义,且对任意 $a \leqslant b$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。如果 a 和 b 彼此独立无关地分别趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 趋向于 I,确切地说,对任给 $\varepsilon > 0$ 总存在 $A > 0$,使得当 $a < -A$,$b > A$ 时永远有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I\right| < \varepsilon \tag{1.6}$$

则称 I 是 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分,记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

同时称广义积分(1.7)是收敛的或 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积。反之,则称广义积分(1.7)是发散的或 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上不可积。

利用极限的符号,把 a 和 b 彼此独立地分别趋向于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的极限 I 记为

$$I = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是,我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

显然,广义积分(1.7)收敛的充要条件是两个广义积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，且这时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

例 1 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。

解 因为 $\int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a$

所以

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} - \arctan a = \frac{\pi}{2}$$

于是，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$$

例 2 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$。

解 因为 $\int_{a}^{b} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$

所以

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} (1 - \mathrm{e}^a) = 1$$

又因为当 $b \to +\infty$ 时 $\mathrm{e}^b \to +\infty$，所以积分 $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 是发散的，从而 $f(x)$

在$(-\infty, +\infty)$上不可积。

例 3 考察广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$。

解 因为 $\int_a^b \cos x \mathrm{d}x = \sin b - \sin a$

且当$x \to \infty$时，$\sin x$不存在极限，所以$\cos x$在$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$和$(-\infty, +\infty)$上都是不可积的。

例 4 考察广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \ (a > 0)$。

解 因为当$p \neq 1$时，对任意$0 < a \leqslant b$有

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \quad (b^{1-p} - a^{1-p})$$

所以当$p > 1$时，x^{-p}在$[a, +\infty)$上可积，且

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{p-1} a^{1-p} \quad (p > 1, a > 0)$$

而当$p < 1$时，x^{-p}在$[a, +\infty)$上不可积。

对$p = 1$时，由

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b - \ln a \to +\infty \quad (b \to +\infty)$$

所以$\frac{1}{x}$在$[a, +\infty)$上也不可积。

1.2 基本运算法则

下面只对$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$型的广义积分进行讨论，所有结论都能容易地搬到$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$型和$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$型的广义积分中去。

设$f(x)$在$[a, +\infty)$上有定义，且对任意$b \geqslant a$，$f(x)$在$[a, b]$上

可积。本节中总认为这个假定是成立的。考虑变动上限的定积分

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \quad (x\geqslant a) \tag{1.10}$$

由定积分理论知，$F(x)$是$[a,+\infty)$上的连续函数。利用(1.10)给出的函数$F(x)$，广义积分(1.3)的定义可复述为：如果当$x\to+\infty$时函数$F(x)$有极限，则广义积分(1.3)收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}F(x)$$

反之，如果当$x\to+\infty$时函数$F(x)$的极限不存在，则称广义积分(1.3)是发散的。从这个意义上说，广义积分(1.3)就是由(1.10)给出的函数$F(x)$，当$x\to+\infty$时的极限。因为函数的极限已有许多运算法则，所以对广义积分(1.3)理应也有相应的运算法则。

(1) 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,+\infty)$上可积，则$f(x)\pm g(x)$在$[a,+\infty)$上也可积，且

$$\int_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

(2) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可积，则对任意常数k，$kf(x)$在$[a,+\infty)$上也可积，且

$$\int_a^{+\infty}(kf(x))\mathrm{d}x=k\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

这两条运算法则的证明相当简单，请读者自己完成证明。

然而广义积分(1.3)作为由变动上限的定积分(1.10)给出的一种特殊的函数$F(x)$当$x\to+\infty$时的极限，因为$F(x)$还具有一些定积分的运算法则，所以理应使广义积分(1.3)也会有相应的运算法则。对定积分来讲，分部积分法和变数变换是两个重要的运算法则，对广义积分(1.3)自然也会有相应的运算法则。

(3) **分部积分公式** 设$u'(x)$，$v'(x)$在$[a,+\infty)$上存在，且对任

意$b \geqslant a$，$u'(x)$ 和 $v'(x)$ 在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^{+\infty} uv' \mathrm{d}x = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vu' \mathrm{d}x \tag{1.11}$$

注 1 (1.11)中的 $uv|_a^{+\infty}$ 表示如下极限

$$uv|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a) \tag{1.12}$$

(1.11)的含义是(1.11)的三项中若有两项是收敛的，例如(1.12)收敛和 $\int_a^{+\infty} vu' \mathrm{d}x$ 收敛，则另一项，如 $\int_a^{+\infty} uv' \mathrm{d}x$，也必收敛，且有(1.11)成立。

证明 对任意 $b \geqslant a$，因为

$$\int_a^b uv' \mathrm{d}x = uv|_a^b - \int_a^b u'v \mathrm{d}x$$

在上式中令 $b \to +\infty$，利用极限的性质立即得(1.11)，证毕。

(4) **变数变换公式** 设 $f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，$x = \varphi(t)$ 是区间$[\alpha, +\infty)$到$[a, +\infty)$上的一个变数变换，$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(+\infty) = +\infty$，且 $\varphi'(t)$ 在$[\alpha, +\infty)$上连续，则两个广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t) \mathrm{d}t$$

有相同的收敛性。当它们收敛时，有

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t) \mathrm{d}t \tag{1.13}$$

证明 记 $x = \varphi(t)$ 的反函数为 $t = \psi(x)$。于是对任意 $b \geqslant a$，有

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \mathrm{d}t = \int_\alpha^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) \mathrm{d}t$$

注意到 $b \to +\infty$ 时 $\psi(b) \to +\infty$，所以在上式中令 $b \to +\infty$ 就得到(1.13)。证毕。

这里我们只叙述了$[\alpha, +\infty)$到$[a, +\infty)$上的变数变换 $x = \varphi(t)$

的积分变换公式(1.13)。类似的推导方法也适用于$(\alpha,\beta]$到$[a,+\infty)$的变数变换,例如$x=\dfrac{1}{t}$是$(0,1]$到$[1,+\infty)$上的一个变数变换,请读者自行写出这时相应于(1.13)的计算公式,并说明这个公式的含义。

1.3 广义积分收敛的条件

前面已经指出广义积分(1.3)的收敛性依赖于当$x\to+\infty$时由(1.10)给出的$F(x)$的极限的存在性。实用中,当$f(x)$比较复杂时,由(1.10)确定的$F(x)$很难给出显式的解析表达式。从而使得我们很难判断当$x\to+\infty$时按这一定义的$F(x)$是否有极限。本节希望给出一些方法,能够直接从$f(x)$的性质(不需求出$F(x)$)判定广义积分(1.3)的收敛性。我们回顾到当$x\to+\infty$时,判断函数$F(x)$极限存在,有两个重要的判断方法:柯西(Cauchy)判别法和单调有界判别法。柯西判别准则指出了当$x\to+\infty$时$F(x)$有极限的准则是:对任给$\varepsilon>0$,存在$A>0$,使得当$x',x''>A$时有$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$。对广义积分收敛性的判断来讲,因为$F(x)$是由(1.10)给出的,所以有

$$|F(x')-F(x'')|=\left|\int_a^{x'}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

这样我们得到广义积分收敛的如下判断准则。

定理 1.1(Cauchy 判别准则) 广义积分(1.3)收敛的充要条件是对任给$\varepsilon>0$,存在$A>0$,使得当$x',x''>A$时总有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{1.14}$$

因为对任意有限区间$[x',x'']$(或$[x'',x']$),我们总有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{x'}^{x''}|f(x)|\mathrm{d}x\right|$$

所以由 Cauchy 判别准则立刻得到

推论 1.1 如果广义积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \tag{1.15}$$

收敛,则广义积分(1.3)收敛。

根据这一推论,当(1.15)收敛时,我们称广义积分是绝对收敛的。当然由(1.3)的收敛不一定能断言(1.15)收敛,这一点将在以后再举例说明。我们把本身收敛,而(1.15)发散的广义积分(1.3)称为条件收敛的。

现在我们来分析一下函数 $F(x)$ 极限存在的单调有界收敛原理。这个原理说若存在 A,使在 $[A, +\infty)$ 上 $F(x)$ 是单调上升的(为了确定起见,这里把单调改成单调上升)且是有上界的,则当 $x \to +\infty$ 时 $F(x)$ 有极限。注意到由(1.10)给出的 $F(x)$,当 $x' > x''$ 时,有 $F(x') - F(x'') = \int_{x''}^{x'} f(x)\,dx$。所以只要被积函数 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上非负,则 $F(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上是单调上升的。这样我们得到广义积分收敛的另一判断准则:

定理 1.2 设存在 $A \geqslant a$,使得被积函数 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 非负,则广义积分(1.3)收敛的充要条件是存在常数 K,使得

$$\int_a^x f(x)\,dx \leqslant K \quad (x \in [a, +\infty)) \tag{1.16}$$

成立。

这个定理的详细证明请读者自行完成。

利用定理 1.2,立刻可得到如下控制收敛原理。

定理 1.3(控制收敛原理或比较判别法) 设存在 $A \geqslant a$ 使得

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad 当 x \geqslant A 时 \tag{1.17}$$

若 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 是可积的,则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上也可积,或者说,若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不可积,则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上必不可积。

证明 设 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积,由定理 1.2 知,存在 $k_1 > 0$ 使得

$$\int_a^x g(x)\mathrm{d}x \leqslant k_1 \quad (x \in [a, +\infty))$$

现在,取 $M>0$ 是$[a,A]$上的连续函数$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$的一个上界,同时取常数 K 满足 $K \geqslant M$ 和 $K \geqslant \int_a^A (f(x)-g(x))\mathrm{d}x + k_1$,于是对任意 $x \in [a, A]$,我们显然有$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \leqslant K$。而当 $x \geqslant A$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^x (f(x)-g(x))\mathrm{d}x + \int_a^x g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^A (f(x)-g(x))\mathrm{d}x + \int_a^x g(x)\mathrm{d}x + \int_A^x (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为在 $[A,x]$ 上 $f(x)-g(x) \leqslant 0$,所以由上式知

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A (f(x)-g(x))\mathrm{d}x + k_1 \leqslant K$$

这样我们已经证明了,对任意 $x \in [a, +\infty)$ 有$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant K$,于是由定理 2 知,$f(x)$ 在$[a, +\infty)$上可积。证毕。

在应用这个定理时,需检验条件(1.17)成立。通常这种检验工作是通过计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 来完成的。实际上,如果当 x 足够大时,$f(x)$ 和 $g(x)$非负且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l \quad (0 \leqslant l < \infty) \tag{1.18}$$

则对任给 $\varepsilon>0$,存在 A,当 $x \geqslant A$ 时,有 $f(x) \leqslant (l+\varepsilon)g(x)$ $(x \geqslant A)$。于是,当 $g(x)$ 在$[a, +\infty)$上可积时,因为$(l+\varepsilon)g(x)$也在$[a, +\infty)$上可积,从而由控制收敛法则知,$f(x)$ 也在$[a, +\infty)$可积。这样,我们

得到了定理 3 的如下推论。

推论 1.2 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 x 足够大时非负。若(1.18)成立，则由 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 可积可推出 $f(x)$ 也在 $[a, +\infty)$ 可积。若

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad (0 < l \leqslant +\infty) \tag{1.19}$$

则由 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 不可积可断言：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上不可积。

推论中的第一部分结论，我们已经作了证明。第二部分的证明和第一部分的证明类似，请读者自行完成。

当我们知道了一些函数的可积性时，就可以用它们作为标准，取为定理 3 或其推论中的 $g(x)$，去判断其他函数的可积性。作为这种标准的函数最常用的是 $\frac{1}{x^p}$。例 4 中已指出了：当 $p > 1$ 时它在 $[a, +\infty)$ 上的积分是收敛的，而 $p \leqslant 1$ 时是发散的，其中 a 为任一正数。利用这一标准函数作为 $g(x)$，我们得到如下的判别法。

定理 1.4(柯西判别法) 如果存在 $A \geqslant a$，使得当 $x \in [A, +\infty)$ 时有

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{c}{x^p} \quad (p > 1)$$

其中 c 为正常数，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积。

定理 1.4′(Cauchy 判别法的极限形式) 设 $f(x)$ 当 x 足够大时非负，如果对某 $p > 1$ 极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = l \quad (l < +\infty)$$

存在，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积；如果对某 $p \leqslant 1$ 极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = l > 0$$

则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上不可积。

例 5 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x$ 的收敛性。

解 因

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \tag{1.20}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = 1$，所以$\frac{1}{x\sqrt{1+x}}$在$[1, +\infty)$上可积，再由(1.20)知，$\frac{|\sin x|}{x\sqrt{1+x}}$在$[1, +\infty)$上可积，从而$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$是绝对收敛的。

例 6 讨论下面积分的收敛性

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}x$。

解 (1) 被积函数当 $x \to +\infty$ 时为$\frac{1}{x}$的一阶无穷小量，所以积分发散。

(2) 被积函数当 $x \to +\infty$ 时为$\frac{1}{x}$的二阶无穷小量，所以积分绝对收敛。

例 7 讨论积分$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln x}$的收敛性，其中 p 是实常数。

解 当 $p > 1$ 时，取 q 满足 $p > q - 1 > 0$。由

$$\lim_{x\to+\infty} x^q \cdot \frac{1}{x^p \ln x} = 0$$

所以由 Cauchy 判别法的极限形式知，这个积分绝对收敛。

当 $p = 1$ 时，由$\int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\ln x\,|_2^b$，故当$b \to +\infty$时，$\int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \to +\infty$，所以积分发散。

当 $p < 1$ 时，取 q 使得 $p < q < 1$，由

$$\lim_{x\to+\infty} x^q \cdot \frac{1}{x^p \ln x} = +\infty$$

所以，由 Cauchy 判别法(极限形式)知积分发散。