上海市教育委员会高校重点教材建设项目

线性代数

XIANXING DAISHU XIANXING DAISHU

XIANXING DAISHU XIANXING DAISHU

主编 / 曹伟丽 蔡康盛

Hunan Science & Technology Press
湖南科学技术出版社

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

线性代数

XIANXING DAISHU XIANXING DAISHU

XIANXING DAISHU XIANXING DAISHU

上海市教育委员会组编

主 编/曹伟丽 蔡康盛

副主编/叶亚盛 苏文悌

主 审/张卫国

Hunan Science & Technology Press

湖南科学技术出版社

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

线性代数

主　　编：曹伟丽　蔡康盛
责任编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 280 号
　　　　　http://www.hnstp.com
印　　刷：核工业中南三〇六印刷厂
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：衡阳市黄茶岭光明路 12 号
邮　　编：421008
出版日期：2002 年 7 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：8.25
字　　数：213000
书　　号：ISBN 7-5357-1455-2/O·118
定　　价：15.00 元

内容简介

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数课程基本要求》，参考工科硕士研究生入学考试的数学考试大纲，并结合高等院校学生的实际水平编写而成的. 全书共分七章，内容包括：行列式；矩阵；线性方程组；向量空间；特征值与特征向量、矩阵的对角化；二次型；线性空间与线性变换. 每章末均备有习题（含基本题和补充题），书末附有习题答案.

本书从教学角度安排内容，并注重线性代数抽象理论的实际背景及在各领域中的应用. 重点突出，难点分散，条理清楚，可作为高等院校线性代数课程的教科书或教学参考书.

前　　言

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，根据全国工科数学课程指导委员会制定的《线性代数课程基本要求》，参考了工科硕士研究生入学考试的数学考试大纲，并结合高等院校学生的实际水平编写而成的．

线性代数的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性．为了使学生掌握线性代数的理论与方法，教材注重抽象概念的实际背景和抽象理论在各领域中的应用．从教学角度安排内容，力求重点突出，难点分散，条理清楚；采用具体与抽象相结合的叙述方法，注意深入浅出．

本教材适用30至50学时左右各类线性代数课的使用．若学时数较少（约30学时左右），建议以前六章正文的基本部分及基本习题作为讲授和训练的基本要求．若学时数较多（约50学时左右），则可学完本书全部内容，包括注*号部分的内容与习题．第七章线性空间与线性变换是第四章向量空间的进一步抽象与扩充．每章后配有两组习题：基本题与补充题，供不同层次学生训练选用．一些引申的例题与习题加注了*号，便于教师因材施教．

本书由曹伟丽、蔡康盛任主编，叶亚盛、苏文悌任副主编．张卫国教授任主审，他认真阅读了全书原稿，并提出了一些改进意见．刘锡平、胡秀兰、陆秋君、贾梅等许多同志为本书做了大量的工作．本书的出版得到李春、杨林根、王新根等同志的帮助，在此一并表示感谢．

由于水平有限，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者与使用本教材的教师批评指正．

编　者

目　　录

第一章　行列式……………………………………………（1）

§1　行列式的定义 ……………………………………………（1）

§2　行列式的性质……………………………………………（10）

§3　行列式的展开式…………………………………………（20）

§4　克莱姆（Cramer）法则…………………………………（28）

习题一 ………………………………………………………（34）

第二章　矩阵 ……………………………………………（40）

§1　矩阵的定义………………………………………………（40）

§2　矩阵的运算………………………………………………（44）

§3　矩阵的初等变换与初等矩阵……………………………（61）

§4　逆矩阵……………………………………………………（70）

§5　分块矩阵…………………………………………………（79）

习题二 ………………………………………………………（88）

第三章　线性方程组 ……………………………………（93）

§1　矩阵消元法………………………………………………（93）

§2　矩阵的秩…………………………………………………（98）

§3　线性方程组解的情况 …………………………………（106）

§4　n 维向量及其线性相关性 ……………………………（113）

§5　向量组的秩 ……………………………………………（127）

§6　线性方程组解的结构 …………………………………（135）

习题三………………………………………………………（148）

第四章　向量空间………………………………………（156）

§1　向量空间的基　维数　向量的坐标 …………………（156）

§2 $\mathbf{R}^n$ 中向量的内积、标准正交基、正交矩阵……… (159)
§3 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换…………………………………… (165)
习题四…………………………………………………… (170)
第五章　特征值与特征向量　矩阵的对角化……………… (173)
§1 特征值与特征向量　相似矩阵 ………………… (173)
§2 矩阵可对角化的条件 ……………………………… (179)
§3 实对称矩阵的对角化 ……………………………… (182)
习题五…………………………………………………… (188)
第六章　二次型………………………………………… (191)
§1 二次型的定义及矩阵表示　合同矩阵 ………… (192)
§2 化二次型为标准形 ……………………………… (194)
§3 惯性定理与正定二次型 ………………………… (209)
习题六…………………………………………………… (215)
***第七章　线性空间与线性变换** ………………………… (218)
§1 线性空间的定义与性质 ………………………… (218)
§2 基　维数　坐标 ………………………………… (222)
§3 基变换与坐标变换 ……………………………… (226)
§4 子空间的维数与基　维数公式 ………………… (229)
§5 线性变换及其矩阵表示 ………………………… (232)
习题七…………………………………………………… (240)
习题答案与提示………………………………………… (243)

第一章　行列式

行列式是研究线性(一次)方程组的重要工具,而且在数学的其他领域及物理、工程技术方面都有着广泛的应用.本章将介绍行列式的定义、性质及求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1　行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

在(1.2)式中,分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$是方程组(1.1)中未知数 x_1, x_2 的系数,按它们在方程组(1.1)中的位置构成数表:

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \tag{1.3}$$

则表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 恰为(1.3)式中实线上两数的乘积减去

虚线上两数的乘积.

定义 1 设有 2^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式.

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

的元素,i,j 分别为元素 a_{ij} 的行标和列标,表示元素 a_{ij} 位于行列式中的第 i 行第 j 列.

参看图 1-1,从左上到右下的连线称为行列式的主对角线(用实线),从右上到左下的连线称为行列式的副对角线(用虚线),则二阶行列式即主对角线上元素的乘积冠以正号,副对角线上元素的乘积冠以负号,二项之代数和,称这一方法为二阶行列式的对角线法则.二阶行列式确定为一个表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,其运算结果称为行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

利用二阶行列式的定义,线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.5}$$

其中分母称为线性方程组(1.1)的系数行列式,记为 D;x_1 的分子是用方程组中的常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21}所构成的行列式,记为 D_1;x_2 的分子是用 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22}所构成的行列式,记为 D_2.于是,(1.5)式又可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=3, \\ 2x_1+x_2=-4. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-4)=5,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=3-8=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4-6=-10,$$

所以,该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{5}=-1, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{5}=-2.$$

在向量代数中,三个向量 $\boldsymbol{a}_1=a_{11}\boldsymbol{i}+a_{12}\boldsymbol{j}+a_{13}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2=a_{21}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{23}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_3=a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k}$ 的混合积

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]=&[(a_{11}\boldsymbol{i}+a_{12}\boldsymbol{j}+a_{13}\boldsymbol{k})\times(a_{21}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{23}\boldsymbol{k})]\cdot \\ &(a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k})=[(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\boldsymbol{i}- \\ &(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})\boldsymbol{j}+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\boldsymbol{k}]\cdot \\ &(a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+ \\ &a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

如果把三个向量的坐标构成一数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

则向量的混合积可表示为数表(1.6)中不同行不同列的 3 个坐标的乘积,再冠以正负号后 6 项之代数和.

定义 2 设有 3^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

为三阶行列式.其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$称为三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

中第 i 行第 j 列的元素.

参看图 1－2,三阶行列式即平行于主对角线的 3 条实线上 3 个元素的乘积冠以正号,平行于副对角线的 3 条虚线上 3 个元素的乘积冠以负号,6 项之代数和,称这一方法为三阶行列式的对角线法则.

三阶行列式确定为一个表达式,是 3! 项的代数和,不考虑正负号,每一项是三阶行列式(1.7)中不同行不同列的 3 个元素的乘积.

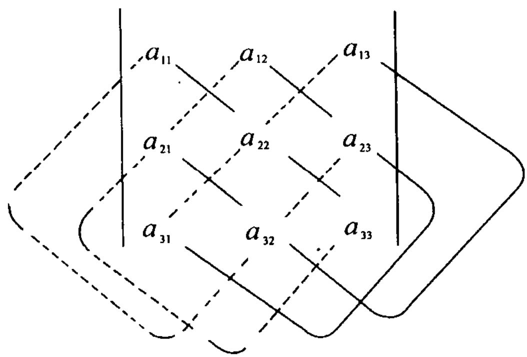

图 1－2

利用三阶行列式的定义,向量的混合积可表示为

$$[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 2 证明向量 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 共面,且当 $\boldsymbol{a}_3=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$ 时,求出 k_1 和 k_2 的值.

证明 因为

$$[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&0&2\\1&5&7\end{vmatrix}=0+4+20-10-14-0=0,$$

所以由向量混合积的几何意义知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 共面.

当 $\boldsymbol{a}_3=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$ 时,即

$\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}=(k_1\boldsymbol{i}+2k_1\boldsymbol{j}+4k_1\boldsymbol{k})+(k_2\boldsymbol{i}+2k_2\boldsymbol{k})=(k_1+k_2)\boldsymbol{i}+2k_1\boldsymbol{j}+(4k_1+2k_2)\boldsymbol{k}$,得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=1,\\2k_1=5,\\4k_1+2k_2=7.\end{cases}$$

解得 $k_1=\dfrac{5}{2}$, $k_2=-\dfrac{3}{2}$.

在二阶与三阶行列式的表达式中,不考虑正负号,每一项都是行列式中不同行不同列的元素之乘积.如果再确定每一项前面的正负号,则我们可将二阶和三阶行列式的定义推广到 n 阶行列式.

二、逆序数

在排列中,自然数 1 至 n 由小到大的排列称为标准排列.

定义 3 在 n 个自然数构成的一个排列中,如果一个较大的数排在一个较小的数的前面,则称这两个数构成一个逆序;一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 t.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

设在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,排在 p_i 前面且比 p_i 大的数有 t_i 个,则称 t_i 为 p_i 的逆序数($i=1,2,\cdots,n$).显然,排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $t=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$.

例 3 分别求出排列 2 4 3 1,2 3 4 1 和 1 4 3 2 的逆序数,并指出其奇、偶性.

解 在排列 2 4 3 1 中,

2 在最前面，其逆序数 $t_1=0$；

4 的前面没有比 4 大的数，故其逆序数 $t_2=0$；

3 的前面比 3 大的有 4，故其逆序数 $t_3=1$；

1 的前面比 1 大的有 2、4、3，故其逆序数 $t_4=3$.

因此，这个排列的逆序数 $t=t_1+t_2+t_3+t_4=4$，是偶排列.

排列 2 3 4 1 的逆序数 $t=0+0+0+3=3$，是奇排列.

排列 1 4 3 2 的逆序数 $t=0+0+1+2=3$，是奇排列.

例 4 求排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数.

解 $t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

显然，标准排列的逆序数 $t=0$.

在一个排列中，将任意两个数互换，其余的数不动，我们称之为对换，相邻两个数对换称为相邻对换.

定理 1 对换排列中的任意两个数，则排列改变奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 和 p_{i+1}，则排列为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$，因为 $p_1,\cdots,p_{i-1}$和 $p_{i+2},\cdots,p_n$ 这些数经过对换后的逆序数没有改变，而 p_i 和 p_{i+1}这两个数的逆序数的变化为：当 $p_i>p_{i+1}$时，对换后 p_i 的逆序数不变，而 p_{i+1} 的逆序数减少 1；当 $p_i<p_{i+1}$时，对换后 p_i 的逆序数增加 1，而 p_{i+1}的逆序数不变. 所以，相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为

$$p_1p_2\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_{i+k}p_j\cdots p_n, \tag{1.8}$$

对换 p_i 和 p_j 两数，得到排列为

$$p_1p_2\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{i+k}p_i\cdots p_n. \tag{1.9}$$

从(1.8)式到(1.9)式可以看成(1.8)式中 p_j 向前作 k 次相邻对换，得 $p_1p_2\cdots p_ip_jp_{i+1}\cdots p_{i+k}\cdots p_n$，然后 p_i 向后作 $k+1$ 次相邻对换变为(1.9)式，即经过 $2k+1$ 次相邻对换. 所以排列(1.8)和

排列(1.9)的奇偶性相反.

在例3的排列中,从2 4 3 1到2 3 4 1是相邻对换,而从2 4 3 1到1 4 3 2是一般对换,故排列改变奇偶性.

三、n 阶行列式

前面已经定义了三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

上式右边每一项3个元素的行标均为标准排列:123,列标是1,2,3的某个排列,共有3! =6个,对应上式右边的6项,其中带正号的3项列标排列分别为123,231,312,均为偶排列;带负号的3项列标排列分别为132,213,321,均为奇排列,于是三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 为自然数1,2,3的某个排列,t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对1,2,3的所有排列 $p_1p_2p_3$(共3!项)求和.

下面给出 n 阶行列式的定义.

定义4 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.10}$$

为 n 阶行列式,简记为 $\det(a_{ij})$,或者记作 D.其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1至 n 的某个排列,t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$

表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$(共 $n!$项) 求和.

$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中第 i 行第 j 列的元素.

n 阶行列式确定为一个表达式,是 $n!$项的代数和,每一项中的 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是(1.10)式左边 n 阶行列式中位于不同行不同列的 n 个元素之乘积.

在 n 阶行列式中,当 $n=1$ 时,规定 $|a|=a$;当 $n=2,3$ 时,即为前面定义的二阶和三阶行列式.

需要指出的是,对角线法则只适用于二阶和三阶行列式.

例 5 证明下三角行列式(主对角线以上的元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中空余部分的元素全为零,下同.

证明 由 n 阶行列式定义,$D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,已知 D 中当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,于是在 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中,列标排列除标准排列:$p_1p_2\cdots p_n=1\ 2\cdots n$(逆序数等于零)外,其他 $n!-1$ 个排列中的逆序数全都大于零,即在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中至少存在一个数 p_i,使 $p_i>i$,于是 $a_{ip_i}=0$,因此,$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$外,都含有零的因子,故

$$D=(-1)^0a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,上三角行列式(主对角线以下的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,主对角线行列式(主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 6 计算副对角线行列式(副对角线以外的元素全为零)

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义即得 $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} =$$

$$\sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{p_11}a_{p_22}a_{p_33},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 为自然数 1,2,3 的某个排列,t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

因此,三阶行列式可等价定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3}.$$

在以上定义中，等号右边 $a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3}$ 的列标构成了一个标准排列：1 2 3，行标成为 1，2，3 的某个排列.

我们可以证明，n 阶行列式也有类似的等价定义.

定理 2 **n 阶行列式可等价定义为**

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$（共 $n!$ 项）求和.

证明略.

§2 行列式的性质

在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，将行变成同序数的列得到的 n 阶行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

同理，D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1 **行列式转置后，其值不变，即 $D^{\mathrm{T}} = D$.**

证明 设