工程薄壁结构计算

曹富新　杨春秋　编

中国铁道出版社

工程薄壁结构计算

曹富新　杨春秋　编

中 国 铁 道 出 版 社
1993年·北京

(京)新登字063号

内 容 简 介

本书讲解了工程薄壁结构的受力性能，特点，阐明了它的基本计算理论和分析方法。

全书分为四章：第一章引论，概括了材料力学杆件的弯曲，并提出自由扭转和约束扭转问题；第二章讲自由扭转；第三章和第四章分别讲述开口和闭口薄壁杆件的扭转问题。

读者对象：工程结构设计人员，有关专业大专院校师生。

工程薄壁结构计算

曹富新　杨春秋　编

*

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑　刘启山　封面设计　翟　达

各 地 新[redacted]书 店 经 售

北 京 顺[redacted]华 印刷厂印

开本：850×1168毫米 1/[redacted]印张：4.75 字数：124千

1993年6月　第1版　第1次印刷

印数：1—2,500册

ISBN7-113-01411-9/TU·306　定价：6.70元

前　言

由于薄壁结构具有良好的力学性能，易于进行优化设计，从而使结构具有重量轻而强度高等优点，使它早已广泛应用于飞机、船舶、车辆、桥梁、起重机械、重型机械和建筑结构等工程。因此，对于设计工程师来说，了解薄壁结构的性能、特点，掌握它的基本理论和分析方法是十分必要的。在高等院校有关专业也开设了相应的课程。

全书共分四章，第一章引论，概括了材料力学杆件的弯曲，并提出自由扭转和约束扭转问题；第二章讲自由扭转；第三章和第四章分别讲述开口和闭口薄壁杆件的约束扭转问题。

本书虽然力图写得简单明了，易读易懂，便于应用，但是由于薄壁结构的理论比较复杂，还必须引入诸如扇性特性和双力矩等新概念，所以它并不是一本通俗读物。

本书可作为高等院校或厂矿学习班相应课程的教材或教学参考书，学时以30左右为宜；也可供大学生、研究生和教师参考。

在编写本书的过程中得到了中国铁道出版社刘启山同志的支持，杨春茹同志为本书绘制了插图，这里一并表示感谢。

作者希望本书能对读者有所帮助，也希望读者对本书的不足或错误之处给予批评指正。

编　者

1991. 10

目　录

主 要 符 号

A 任选极点，中线包围面积

A_i 第i个闭室中线包围面积

B 主极点，弯曲中心，扭转中心，双力矩

b，b_x，b_y截面宽度，截面在x方向、y方向的宽度

C 截面形心

E 弹性模量

$E_1=\dfrac{E}{1-\mu^2}$ 折算弹性模量

G 剪切弹性模量

H，h 截面高度

$I_x=\int_A y^2\mathrm{d}A, I_y=\int_A x^2\mathrm{d}A, I_{xy}=\int_A xy\mathrm{d}A$ 截面关于x轴、y轴的惯性矩，惯性积

I_{xp}、I_{yp}形心主惯性矩

I_k 截面抗扭惯性矩

I_p 截面的方向惯性矩

$I_\omega=\int_A \omega^2\mathrm{d}A$ 截面扇性惯性矩

$I_{\omega a}$、$I_{\omega b}$ 关于极点A、极点B的扇性惯性矩

$I_{\omega x}=\int_A \omega y\mathrm{d}A$，$I_{\omega y}=\int_A \omega x\mathrm{d}y$ 截面关于x轴、y轴的扇性线静矩

$I_{\omega ax}$、$I_{\omega ay}$，$I_{\omega bx}$、$I_{\omega by}$ 关于极点A、B的扇性线静矩

$I_{\bar{\omega}}=\int_A \bar{\omega}^2\mathrm{d}A$ 广义扇性惯性矩

$I_{\bar{\omega}a}$、$I_{\bar{\omega}b}$关于极点A、B的广义扇性惯性矩

$I_{\bar{\omega}x}=\int_A \bar{\omega} y\mathrm{d}A$、$I_{\bar{\omega}y}=\int_A \bar{\omega} x\mathrm{d}A$ 闭口截面的广义扇性线静矩

$I_{\bar{\omega}ax}$、$I_{\bar{\omega}ay}$，$I_{\bar{\omega}bx}$、$I_{\bar{\omega}by}$闭口截面关于极点A、B的广义扇性线静矩

$J_1 J_2$ 惯性矩张量第一、第二不变量

$k=\sqrt{\dfrac{GI_k}{E_1 I_{\omega b}}}$（开口）， $k=\sqrt{\dfrac{GI_k}{E_1 I_{\bar{\omega}b}}\mu}$（闭口） 扭转特性系数

l 杆长，中线长，长度

l, m, n 方向余弦

$M_x=\int_A \sigma_z y\mathrm{d}A$，$M_y=\int_A \sigma_z x\mathrm{d}A$ 绕x、y轴的弯矩

M_{xp}、M_{yp} 关于形心惯性主轴的弯矩

$\overline{M}_x$、$\overline{M}_y$ 折算弯矩

M_z 绕z轴的扭矩

M_t、M_0、M 外扭矩

M_k 纯扭转扭矩

$M_\omega=\int_A \tau_\omega \rho\mathrm{d}A$ 弯曲扭矩

$M_{\bar{\omega}}$=闭口截面的弯曲扭矩

m 分布扭矩

m

N 轴力，中线s上的点

N_0 中线s的起点

O 坐标原点

P 压力

Q 剪力

Q_x、Q_y x、y方向的剪力

q、q_a、q_i 剪力流

S 横截面面积

$S_x=\int_A y\mathrm{d}A$，$S_y=\int_A x\mathrm{d}A$ 截面关于x、y轴的静矩

$S_x^o=\int_s^{s_o} y\mathrm{d}A, S_y^o=\int_s^{s_o} x\mathrm{d}A$　截面S以外部分的静矩

$S_\omega=\int_A \omega\mathrm{d}A$　截面的扇性静矩

$S_\omega^o=\int_s^{s_o}\omega\mathrm{d}A$　截面S以外部分的扇性静矩

$S_{\bar{\omega}}=\int_A \overline{\omega}\,\mathrm{d}A$　闭口截面的广义扇性静矩

$S_{\bar{\omega}}^o=\int_o^s \overline{\omega}\,\mathrm{d}A$　0～s的部分扇性静矩

$S_{\bar{\omega}a}^o$、$S_{\bar{\omega}b}^o$　关于极点A、B的部分扇性静矩

$\overline{S}_{\bar{\omega}b}^o$　折算主扇性静矩

S　中线坐标

$\overline{S}=\int_o^s \frac{\mathrm{d}S}{\delta}$，$\bar{S}_o=\oint\frac{\mathrm{d}S}{\delta}$

T　薄膜张力，合剪力

V　体积

u、v、w　x、y、z方向的位移

u_n、v_s　中线法向和切向位移

x、y、z　笛卡尔坐标

x_a、y_a　极点A的坐标

x_b、y_b　开口截面弯曲中心的坐标

$\hat{x}_b$、$\hat{y}_b$　闭口截面弯曲中心的坐标

α　常数，单位长度扭转角，角度

a_x、a_y　极点B与A的相对坐标差

β　常数，主轴与x轴夹角，角度

r、r_{xy}、r_{zx}、r_{zy}、r_{ns}、r_{zn}、r_{zs}剪应变

δ　壁厚

ε、ε_x、ε_y、ε_n、ε_s　正应变

$\theta(z)$ z截面的扭转角

$\theta(z)$ 闭合截面中与扭转角θ有关的函数

μ 泊松比，翘曲系数

ρ 形心或极点至中线上某点切线的垂距

ρ_a 极点至中线上N点的距离

$\rho_{\bar{n}}$ 极点至中线上某点切线的垂距

ρ_n 极点至中线上某点法线的垂距

σ_z、σ_s 正应力

σ_w 扇性正应力

τ、τ_{zx}、τ_{zy}、τ_{zn}、τ_{zs} 截面上的剪应力

τ_k 纯扭转剪应力

τ_w 扇性剪应力

φ 扭转函数（翘曲函数）

Ψ 扭转应力函数

$\Omega=2A$中线包围面积的二倍

ω 扇性面积

$\bar{\omega}=\omega-\bar{\rho}\ \bar{s}$ 闭口截面中与ω有关的量

ω_a、ω_b、ω_c 关于极点A、B、C的扇性面积

〔I〕、〔I'〕 惯性矩张量矩阵

〔λ〕坐标转换矩阵

第一章　引　　论

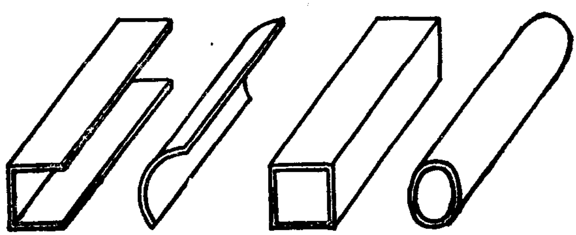
第一节　概述和薄壁杆件定义

在实际工程中，常常遇到所谓薄壁杆件（构件）。由于它具有强度高、省材料的特点，所以应用非常广泛。例如，在起重机械、重型机械，船舶、车辆、飞机、航天器、桥梁，建筑等结构中都广泛应用着薄壁构件。因此，对于工程师来说，掌握薄壁构件的理论和计算方法是非常必要的。

薄壁杆件的几何特征是某一个方向的几何尺寸l远大于垂直该方向横截面上的特征尺寸d（即横截面上的最大尺寸，如直径、高、宽等），同时横截面上的最大厚度$\delta \ll d$，一般

$$\frac{\delta}{d} \leqslant 0.1, \quad \frac{d}{l} \leqslant 0.1$$

薄壁杆件通常分为开口和闭口两类（图1—1），尽管二者在几何特征上，问题的性质上和分析解决问题的方法步骤上有类似



(a)　　(b)

图 1—1

之处，但在应力分布和变形特点上二者是不同的，因此我们将分别进行研究。

如果横截面沿长度方向不变且轴线保持为直线，则称为等直截面薄壁杆件，这是本书主要的研究对象。

平分壁厚的面称为薄壁杆件的中面，根据薄壁杆件的不同，中面可以是开口或闭口的柱形曲面或棱柱面；中面与横截面的交线称为横截面的中线，它的形状一般为开口或闭口的曲线或折线。中线描述了横截面的形状，以后我们常用中线来表示横截面，工程上常遇见的薄壁杆件的横截面如图1—2。垂直中线的截面称为法截面，法截面是狭矩形，宽为壁厚，长为杆长。

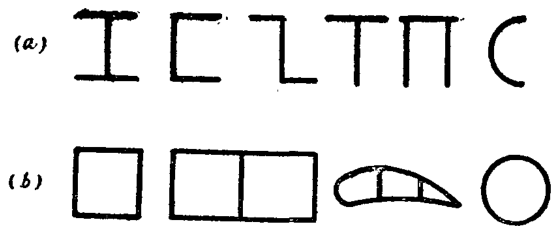


图 1—2

薄壁杆件是一个复杂的受力构件，常是拉、压、弯、扭的联合作用。其中拉压和弯曲在材料力学里进行了详尽的分析。本书将着重研究薄壁杆件的扭转，第二章研究自由扭转（纯扭转），第三和第四两章分别研究开口和闭口薄壁杆件的约束扭转。

在所有的分析中，我们都选择笛卡尔直角坐标系，且将轴线方向取为z轴方向。

如果紧靠支撑将杆件切取下来就是一个杆元，用字母i和j分别表示它的起始端和终止端（形心）。在杆元的两个端面上受到支撑（节点)对杆元的作用力，称为杆端力，在i端受到的力和力矩（或扭矩）为X_i、Y_i、Z_i和M_{xi}、M_{yi}、M_{zi}，在j端为X_j、Y_j、Z_j和M_{xj}、M_{yj}、M_{zj}。外力和杆端力的正负号规定：力以与坐标轴方向相同者为正，力矩或扭矩以与右手螺旋法则一致者为正与上述规定相反的力或力矩为负。（图1—3，a）。

在杆元中间任何一个截面上的内力素用Q_x、Q_y、N 和 M_x、M_y、M_z 表示，它的正负号是这样规定的，如果截面的外法线方向与z 方向相同，力以与坐标轴方向相同者为正，力矩和扭矩以与右手螺旋法则相同者为正；如果截面外法线方向与 z 方向相反则上述规定相反。如此，在i端$X_i=Q_x|_{z=0}$，$T_i=Q_y|_{z=0}$、$Z_i=N|_{z=0}$、$M_{xi}=M_x|_{z=0}$、$M_{yi}=M_y|_{z=0}$、$M_{zi}=M_z|_{z=0}$，在j端则相差一负号，如$X_j=-Q_x|_{z=\theta}$……。（图1—3，b和c）。

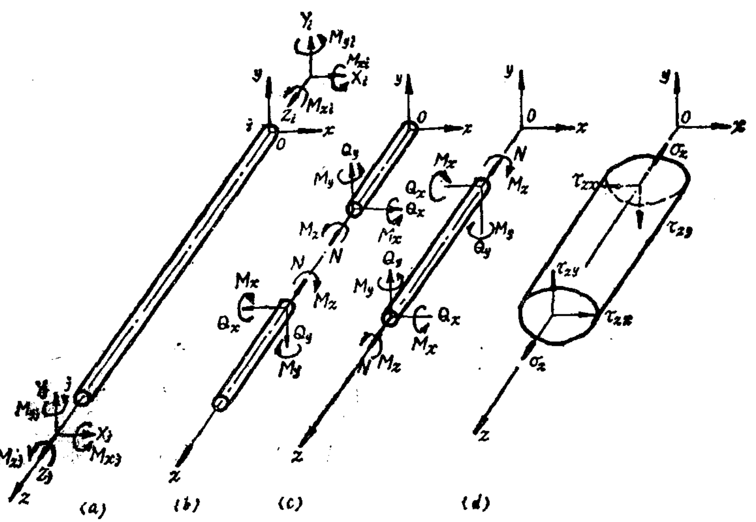


图 1—3

截面上的应力记为σ_z、τ_{zx}、τ_{zy}，正应力的下标表示截面的法线方向和应力的方向，剪应力第一个下标表示截面的法线方向，第二个下标表示应力的方向。其正负号规定如下：如截面的外法线与z轴相同，则应力以与坐标轴同向者为正，反向者为负；如截面外法线方向与z轴反向则与上述规定相反。（图1—3，d）。

第二节 等直薄壁杆件的应力公式

1. 简单拉伸（压缩）

正应力 $\sigma_z=\dfrac{N}{S}$ （1—1）

式中 N——轴力（通过截面形心），以拉为正，压为负；

S——杆件横截面面积。

注：建立该公式时应用了应力沿截面均匀分布的计算假定。

2. 纯弯曲

正应力 $\sigma_z=\dfrac{M_{xp}y}{I_{xp}}$ 或 $\sigma_z=-\dfrac{M_{yp}x}{I_{yp}}$ （1—2）

式中 M_{xp}、M_{yp}——分别表示截面上绕x、y轴的弯矩；

I_{xp}、I_{yp}——分别表示关于x、y轴的截面惯性矩。

记号中带下标p的量表示截面性质或内力素是关于形心惯性主轴的。为简便，后面在不易引起混淆时，有时也不加下标p。

注：式（1—2）是取形心惯性主轴为坐标轴的，且弯矩作用在通过该轴的一个纵向平面或它的平行平面内，即属于平面弯曲。建立该公式时利用了应力在截面上线性分布的计算假定。

如果弯矩M_p作用在通过形心的平面（非惯性主平面）内，则可将其分解为M_{xp}、M_{yp}分别作用在两个惯性主平面内。（图1—4）。这时不是平面弯曲，正应力可利用叠加原理表为

$$\sigma_z=\frac{M_{xp}y}{I_{xp}}-\frac{M_{yp}x}{I_{yp}} \qquad (1-3)$$

式中的M_{xp}、M_{yp}可由M_p按向量分解得到，即将力矩及扭矩用双箭头表示（为的是与力向量相区别），与普通单箭头向量运算相同。由图1—4，有

$$M_{xp}=M_p\cos\varphi$$
$$M_{yp}=M_p\sin\varphi$$

3. 简单横力弯曲

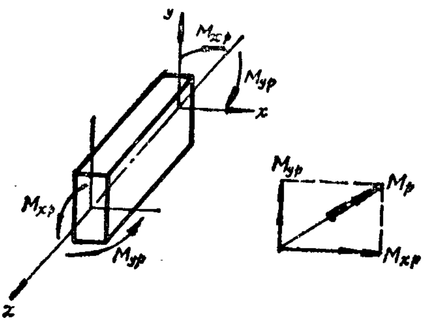


图 1—4

正应力 $\sigma_z=\dfrac{M_{xp}(z)y}{I_{xp}}$或$\sigma_z=-\dfrac{M_{yp}(z)x}{I_{yp}}$ (1—4)

剪应力 $\tau_{zy}=\dfrac{Q_{yp}(z)S_{xp}}{b_xI_{xp}}$ 或 $\tau_{zx}=\dfrac{Q_{xp}(z)S_{yp}}{b_yI_{yp}}$ (1—5)

式中 M_{xp}、M_{yp}的含义同前，但为z的函数；

Q_{xp}、Q_{yp}——x、y向的剪力；

S_{xp}或S_{yp}——距中性轴为y（或x）的横线以外部分的横截面面积对x或y轴的面积矩（静矩）；

b_x、b_y——截面在x、y方向的宽度。

注：弹性力学可以证明，梁受纯弯曲的正应力公式（1—2）是精确的。材料力学把纯弯曲的正应力公式直接应用到横力弯曲中，因此式（1—4）并不是精确公式，但在杆件足够长时，它的精度是能够满足工程要求的。与纯弯曲不同，横力弯曲存在剪应力，按公式（1—5）计算。

在简单的横力弯曲中，如果横向力通过弯曲中心且平行形心惯性主平面，或作用在对称平面内，则属于平面弯曲。

4．组合弯曲或斜弯曲（图1—5）

正应力 $\sigma_z=\dfrac{M_{xp}(z)y}{I_{xp}}-\dfrac{M_{yp}(z)x}{I_{yp}}$ (1—6)

剪应力 $\tau_{zx}=\dfrac{Q_{xp}(z)S_{yp}}{b_yI_{yp}}$ (1—7)

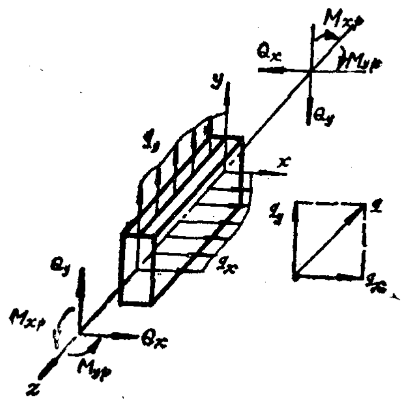


图 1—5

$$\tau_{zy}=\frac{Q_{yp}(z)S_{xp}}{b_x I_{xp}}$$

注：上述公式，对于有两个对称轴的横截面梁，且横力作用在形心惯性主平面（此时为对称面）内是正确的。（图1—5）。对于非对称的横截面，要求横力作用在通过弯曲中心且平行某个形心惯性主平面的平面内。斜弯曲已不是平面弯曲。（图1—6）。

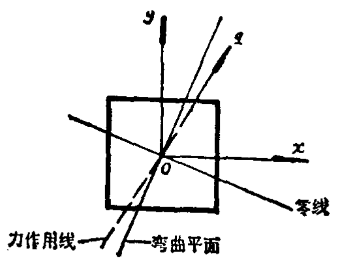


图 1—6

5. 拉伸（或压缩）与弯曲的联合作用。偏心拉伸（或压缩）

正应力 $\sigma_z=\frac{N}{S}+\frac{M_{xp}(z)y}{I_{xp}}-\frac{M_{yp}(z)x}{I_{yp}}$ （1—8）

剪应力 $\tau_{zx}=\dfrac{Q_{xp}(z)S_{yp}}{b_yI_{yp}}$，$\tau_{zy}=\dfrac{Q_{yp}(z)S_{xp}}{b_xI_{yp}}$ (1—9)

注：拉伸与弯曲应符合前面简单拉伸（或压缩）与简单横力弯曲的要求。如果轴力平行于 z 轴但不通过形心，这时可以简化为简单拉伸（或压缩）与在两个形心惯性主轴平面内纯弯曲的叠加，式（1—8）仍适用（图1—7）。

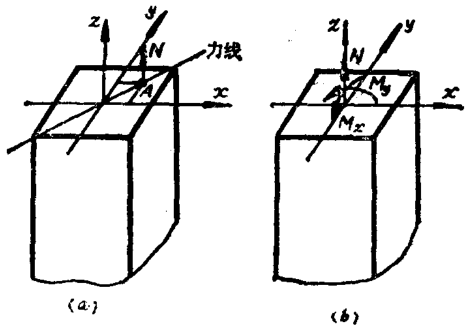


图 1—7

6. 弯曲与扭转的联合作用。弯曲中心（剪切中心）

一个构件，例如曲轴，可以同时受到弯曲与扭转的作用，这时弯曲正应力仍用前面的公式计算，同时再解个扭转问题与之叠加。对于只受横向荷载作用的杆件，除了作用在平行于形心惯性主平面并通过弯曲中心的情形外，在受到弯曲作用的同时还要受到扭转作用。在这种情形下，首先需要找到弯曲中心，然后将荷载按静力等效原则平行移至该点，即作用一个横力和一个扭矩。这样就可以把问题分为弯曲与扭转两个问题分开进行计算，其中弯曲部分在材料力学中已作了详细的研究，可利用前面介绍的公式计算；扭转部分即是本书后面将要着重研究的内容。

弯曲中心（或简称弯心）的概念我们在下面结合槽钢的实例给以说明。假设槽钢在形心惯性主平面内作用横向荷载Q，这时在横截面上将出现的应力有：①σ_z，分布方式如图1—8(c)；②