中学数学解题丛书

立体几何

解题错误分析

王万祥 编著

黑龙江科学技术出版社

立体几何
解题错误分析

王万祥　编著

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

责任编辑：翟明秋
封面设计：洪 冰

立体几何解题错误分析

王万祥 编著

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
齐齐哈尔第一印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米32开本7.75印张158千字
1986年5月第1版·1986年5月第1次印刷
印数：1—11,930册
书号：13217·152　　定价：1.25元

前　言

数学是一门应用广泛的基础学科，是学习和研究其他科学的有力工具。数学是中学的一门基础课，学好中学数学对于学生接受更高深的科学知识和参加生产劳动都有十分重要的作用。

解题在数学学习中有着特殊重要的意义，解题能力是掌握知识程度的主要标志。在数学里，才智就是解决问题。有些学生虽然对概念、定理背得烂熟，但是在解答非常简单的题目时却会糊涂起来。有些学生只具有一般的解题本领，一遇到形式不熟或没见过的题目，就茫然不知所措或者错误地进行解答。

在解答数学问题时，常常出现的典型性错误有：概念不清造成的概念性错误；忽视条件、错用结论造成的知识性错误；违反逻辑规律造成的逻辑性错误；以偏概全、以特殊代一般造成的方法性错误等等。

为了学会解题，除了弄清概念和做解题练习以外，一个很好的办法是分析题目解答的错误，寻找正确的解题方法和规律。哈尔滨市数学会为了帮助中学生从解答数学问题的错误中吸取经验教训，寻找解题方法和规律，提高解题能力；同时，也为了给中学数学教师提供一些在在教学中分析典型错例的方法，以指导学生解答题目，提高教学质量，特组织哈尔滨市几位有丰富教学经验和长期从事教学研究的同志，

编著了这套中学数学解题错误分析丛书。

本套丛书是根据中学数学教学大纲，配合通用教材分科，按章编写的。书中所列题目具有典型性，错误解法具有普遍性。这套丛书共分五册，高中代数由时承权、戴再平编著；立体几何由王万祥编著；平面解析几何由邵旭、冯建国编著；初中代数由王翠满、马明珠编著；平面几何由唐格森、王国器编著。哈尔滨市教育学院王万祥副院长和我审阅了各册原稿。

书中错误之处，敬请广大读者批评指正。

哈尔滨市数学会秘书长
黑龙江大学数学系副教授　颜秉海

1985年4月

目　　录

第一章　直线和平面

学习基本要求

本章在平面几何知识的基础上研究平面的基本性质、空间两条直线、空间直线和平面、空间两个平面的位置关系、射影的初步知识和平面图型的直观图的画法．这些内容是学习以后各章内容的重要基础，因此学好这些内容是学好立体几何的关键。

在本章内容中，平面的基本性质是研究直线与平面位置关系的基础．在直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系中，重点是平行和垂直关系．在直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系中，直线与平面的位置关系起着承前启后的作用。除了异面直线以外，直线与直线的关系往往需要放在平面上来考虑．平面与平面的位置关系问题，一般地也常常可以归结为直线与平面位置关系的问题。例如研究两个平面是否平行只要研究在一个平面内是否有两条相交直线和另一个平面平行，研究两个平面是否垂直只要研究在一个平面内是否有一条直线和另一个平面垂直。掌握好直线与平面的位置关系也就容易掌握平面与平面的位置关系。因此学好平面的基本性质和直线与平面的位置关系是学好本章的关键。

本章给出的概念较多，必须正确地理解和牢固地掌握。本章重要的概念有：异面直线的概念；角的概念（主要是异面直线所形成的角、直线与平面所形成的角、二面角）；有关距离的概念（异面直线间的距离、相互平行的直线与平面间的距离、相互平行的平面与平面间的距离）。在解本章以及以后各章有关的习题时，常常会因对这些概念理解和运用得不好而发生错误。

研究直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系的有关性质定理和判定定理需要进行严谨的证明。现行中学课本在讲这一部分内容时，安排的证明题目比较多，因此，要学好本章，掌握好逻辑推理方法是十分重要的。在这一部分解题进行逻辑推理，常见的错误有以下几个方面：

1. 不能正确地使用反证法。解这一部分的证明题时运用反证法较多，而且欲证结论的反面往往不只是一种情况。运用反证法证题时，要注意否定问题的结论的反面的所有可能情况。

2. 不适当地拓广平面几何定理。研究立体几何是在掌握平面几何知识基础上进行的。为了解决立体几何问题，常常先把它化为平面几何问题，然后运用平面几何知识解决。平面几何的不少概念和定理，在立体几何中仍然成立。但是要注意相当多的平面几何定理到空间便不再成立。因此，解题时要特别注意防止因不适当地拓广平面几何定理而发生错误。

3. 不能正确处理特殊和一般的关系。比较常见的错误是忽视特例和以特殊代替一般。

4. 犯循环论证的错误。

研究立体几何问题需要有较强的空间想象能力，学习和研究立体几何问题的过程是培养和发展空间想象能力的过程。由于本章是立体几何的开头，可能因为空间想象能力薄弱，刚刚学完平面几何习惯于在平面内来考虑问题，把平面图形的性质和空间图形的性质混淆起来（如习惯于在同一平面内的两条直线不相交就平行，忽视异面直线的存在；习惯于在平面内经过一点有且只有一条直线和已知直线垂直，认为在空间也是这样等等），或因为对在平面内画出的空间图形生疏而把空间图形看成是平面图形（如把异面直线的图形看成是相交直线的图形，把平面看成是平行四边形等等）。因此，应该特别注意掌握认识空间图形的要领，学会画空间直线与直线、直线与平面、平面与平面各种位置关系，以及过去学过的比较简单的几何体的直观图。避免因识图或画图不当而导致解题错误。要注意画图与论证以及计算的结合。使图形各部分的相关位置合理，大小比例适当。

在应用有关直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系的性质定理和判断定理解决一些实际问题时，要能正确地把实际问题化为数学问题，计算要准确而迅速，避免马虎。

解题错误分析

一、平面基本性质

例 1　“三点确定一个平面”这个命题是真命题还是假

命题？为什么？

【错误解答】 这个命题是真命题。它是一个平面基本性质公理的简明叙述形式。

【错因分析】 上面这个解答是错误的。理由是：

（1）这个解答的结论“这个命题是真命题”是错误的。“确定一个平面”的含意是“有且只有一个平面”。“有”说明图形的存在性，“只有一个”说明图形的唯一性。“确定一个平面”就是既存在又唯一。“过三点有一个平面”，这个命题是真命题。可是过三点是否只可以有一个平面呢？这要看给定三点的位置关系如何？空间三点的位置关系有两种可能，一是不共线，二是共线。如果给定的三点不在同一条直线上，那么过这三点只有一个平面。如果给定的三点在同一条直线上，那么过这一条直线和这条直线外任意一个点都有一个平面，因此可以有无数个平面。所以，“过三点只有一个平面”这个命题是假命题。总起来说，“三点确定一个平面”是个假命题。说它是个真命题是错误的。

（2）解答中说所给命题是真命题的理由是错误的。说“三点确定一个平面”是一个平面基本性质公理的简明叙述形式是不正确的，因为平面基本性质公理是“经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面”。而本题中的叙述漏掉了公理中的重要条件：“不在同一条直线上”，使命题发生了质的变化。因此它既不是公理也不是定理。产生这种错误解答的原因是：没有深入理解和牢固掌握平面的基本性质公理和没有认真剖析所给的命题。这个问题的错解启示我们，对一个命题要逐字逐句地理解其含意。解题时首先要认

真审题。对题目要逐字逐句地剖析。特别是一些重要的字词，常常对解题起着关键作用，必须抓住。

【正确解答】 这个命题是假命题。因为空间三点的位置关系有两种可能，一是三点共线，二是三点不共线。当三点共线时过这三点所在直线可以有无数个平面，而不是只有一个平面，即平面不能被确定。所以，命题“三点确定一个平面”是假面题。

【注】要证明一个全称肯定命题“所有S都是P”，就得证明“任一S都是P”。而要推翻“所有S都是P”，只要举出一个反例“某一个S不是P”就够了。三点确定一个平面”是一个全称肯定命题。这个命题的意思是任意三点都可以确定一个平面。正确解答中说，这个命题是个假命题，就是要推翻这个命题。因此，指出共线的三点不能确定一个平面就够了。

例2 如果三个平面有一个公共点，它们有几条交线？说明理由并画出图形。

【错误解答】 设空间的三个平面α、β、γ，它们的一个公共点为P。根据平面基本性质公理“如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线”，$\because$平面α、β有一个公共点P，$\therefore$平面α、β有过其公共点P的一条交线。设其为a。同理，$\because$平面β、γ有一个公共点P，$\therefore$平面β、γ有过其公共点P的一条交线，设其为b。平面γ与α的位置关系可能有两种情况：（1）平面γ与α不相交。如图1—1。这是卡面γ与α位置关系的一般情形；（2）平面γ与α相交。如图1—2。这时平面

γ与α有一条交线c。如果把图1—1中的平面γ绕交线b逆时针旋转就可以得到图1—2。综上所述，如果三个平面有一个公共点，那么它们可能有两条交线，也可能有三条交线。

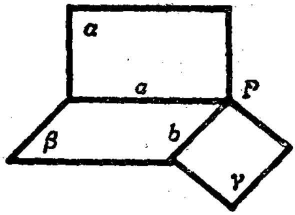

图1—1

【错因分析】 上面解答的主要错误有两个：

（1）图1—1的情况是不存在的。因为在平面基本性质公理“如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线”中的两个平面是指任何位置关系的两个平面。对于图1—1中的平面γ和α，∵它们有一个公共点P，∴它们必有过公共点P的一条交线。平面γ与α不相交非但不是一般情形，而且是不可能存在的。这也就是说，三个平面有一个公共点，它们不可能有且只有两条交线。图1—1中的图形也是错误的。根据平面基本性质公理，画有一个公共点的两个平面，必须同时画出它们过公共点的交线。用平行四边形表示平面，但平面并不是平行四边形，平面是无限延展的。

（2）仅有图1—2的情况是不完全的。这是因为只考虑到三个平面的三条交线位置关系的一般情况，没有考虑到三条交线位置关系的变化。如果交线a和b之间的夹角逐渐变小，直至变为0°，即交线a和b相互重合（令其为l）。这时，∵在直线l上的异于点P的点$Q\in$直线a，直线$a\subset$平面α，∴点$Q\in$平面α。又∵点$Q\in$直线b，直线$b\subset$平

面 r，∴点$Q\in$平面 r。即点Q既在平面 a 上，又在平面 r 上，∴点Q在平面 a 和 r 的交线 c 上。于是直线 c 和 l 有两个公共点P和Q，∴直线 c 和 l 相互重合，即直线 a、b、c 重合为直线 l。∴这时平面 α、β、γ 有一条交线 l，如图 1—3。

综上所述，本题的正确答案是：如果三个平面有一个公共点，那么它们有过这个公共点的三条交线或一条交线。其图形如企 1—2、3。

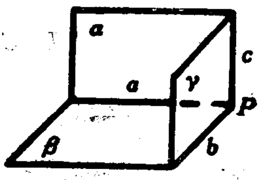

图 1—2

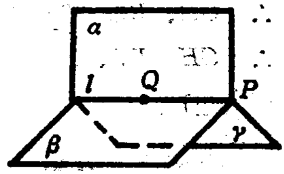

图 1—3

例 3 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，点E、F、G、H、L、M 分别是棱 A_1B_1、B_1B、BC、CD、DD_1、D_1A_1 的中点。求证 $FFGHLM$ 是正六边形。

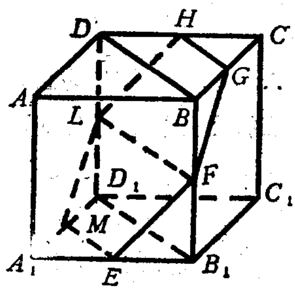

图 1—4

【**错误证法**】 如图 1—4，连结BD、B_1D_1。在$\triangle BCD$中

∵ G、H分别是BC、CD的中点，

$\because\ GH \parallel BD,\quad GH=\frac{1}{2}BD.$

在矩形 DD_1B_1B中，

$\because\ F$、L分别是BB_1、DD_1的中点，

$\therefore\ BE \perp\!\!\!= DL$，$DLFB$为矩形。

因此 $BD \parallel FL$，故$GH \parallel FL$，

$\therefore\ GH$、FL 在一个平面上。

同理可证，EM、FL 在一个平面上。

又 $\because\ GH \parallel FL$，$EM \parallel FL$，$\therefore\ GH \parallel EM$，

$\therefore\ GH$、EM 在一个平面上，

$\therefore\ GH$，FL、EM 在同一个平面上，即 $EFGHLM$ 为平面六边形。

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为1，则

$BD=\sqrt{2}$，$GH=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

同理可证，$EF=FG=HL=LM=ME=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore\ EFGHLM$ 为正六边形。

【错因分析】 上面的证明主要错误有两个：

（1）点E、F、G、H、L、M 共面的证明是错误的。$\because$根据$GH \parallel FL \parallel EM$ 只能断定GH和FL，FL 和EM、GH和EM 分别共面，不能断定平面$GHLF$、$FLME$、$GHME$、重合为一个平面。一般地，平面$GHLF$、$FLME$、$GHME$ 可能两两相交于不共面的三条相互平行的直线。这里，直线GH、FL、EM 共面是一种特殊的情况，是由给定的特

殊图形和特殊的条件所决定的。

（2）在证明 $EFGHLM$ 是平面多边形之后，为证明 $EFGHLM$ 是正六边形，只证明 $EF=FG=GH=HL=LM=ME$ 是不够的。根据正多边形定义，还必须证明 $\angle MEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHL=\angle HLM=\angle LME$。

以上两个错误属于论据不足就下结论，即犯了"不能推出"的错误。这个例子告诉我们，证题时，推理过程的每一步都必须是严谨的。理由充足、条件够用且不多余时才可以得出结论。

【正确证法】 如图1—5，向两方延长 FG，使之与其所在平面上的 C_1C 的延长线相交于点 C_2。与 C_1B_1 的延长线相交于点 B_2。设正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，

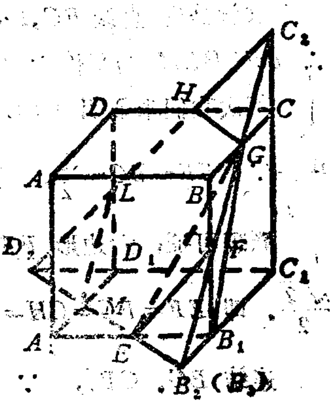

图 1—5

∵ F、G 分别为 BB_1、BC 的中点，

$$\therefore\ BF=BG=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}.$$

在 $\triangle GBF$ 中，∵ $\angle GBF=\mathrm{Rt}\angle$，∴ $\angle BFG=\angle FGB=45°$。又在 $\triangle B_2B_1F$ 中，∵ $\angle B_2B_1F=\mathrm{Rt}\angle$，$\angle B_1FB_2=\angle BFG=45°$，

$$\therefore\ \angle FB_2B_1=45°,\quad \therefore\ B_1B_2=FB_1=\frac{1}{2}.$$

将 EM 向两方延长，设其与 C_1B_1 的延长线相交于点 B_3，用同样的方法可以得到 $B_1B_3=\frac{1}{2}$。

而点 B_2、B_3 都在 C_1B_1 的点 B_1 的同侧，

$\therefore$ 点 B_2、B_3 重合，即三直线 GF、ME、C_1B_1 共点 $B_2(B_3)$。

类似地，可以证明直线 FG、LH、C_1C 共点 C_2，直线 EM、HL、C_1D_1 共点 D_2。

这就是说，直线 FG，HL、ME 两两相交构成 $\triangle B_2C_2D_2$。

$\therefore$ $EFGHLM$ 为平面六边形。

其次我们来证明 $EFGHLM$ 为正六边形。在 $\triangle GBF$ 中，$\because$ $BF=BG=\frac{1}{2}$，$\angle GBF=\text{Rt}\angle$，$\therefore$ $FG=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

同理可证，六边形 $EFGHLM$ 的其余各边也都等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。即 $EF=FG=GH=HL=LM=ME$。

连结 EG、GB_1，$\because$ $A_1B_1\perp B_1C_1$，$A_1B_1\perp B_1B$，

$\therefore$ $A_1B_1\perp$ 平面 B_1C_1CB，$\therefore$ $A_1B_1\perp B_1G$。

在 $\text{Rt}\triangle EB_1G$ 中，$\because$ $EB_1=\frac{1}{2}$，$\therefore$

$$B_1G=\sqrt{BB_1^2+BG^2}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore\quad EG^2=EB_1^2+B_1G^2=\frac{3}{2}.$$

根据余弦定理，在 $\triangle EFG$ 中，$\therefore$

$$\cos EFG=\frac{EF^2+FG^2-EG^2}{2EF\cdot FG}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2},$$

而 $0°<\angle EFG<180°$，

∴ $\angle EFG=120°$。

同理可证，六边形 $EFGHLM$ 的其余各角也都等于 $120°$。即 $\angle EFG=\angle FGH=\angle GHL=\angle HLM=\angle LME=\angle MEF$。

∴ $EFGHLM$ 为正六边形。

例4 已知空间的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的对应顶点所在直线 AA_1、BB_1、CC_1 相交于同一点 O，对应边所在直线 AB 和 A_1B_1 相交于点 P，BC 和 B_1C_1 相交于点 Q，AC 和 A_1C_1 相交于点 R。求证点 P、Q、R 在同一条直线上。

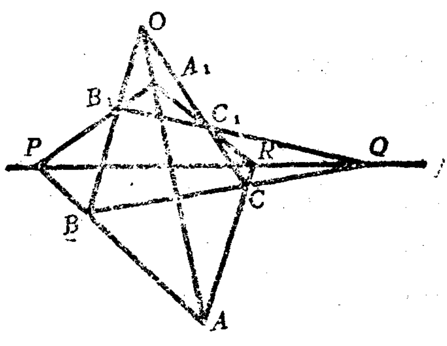

图 1—6