

///

科学天下 新观念数学



数学魔法?

Mathematical Sorcery

[美] 卡尔文·克劳森 / 著 周立彪 / 译 湖南科学技术出版社



科学天下%新观念数学



数学魔法?

[美] 卡尔文·克劳森 / 著 周立彪 / 译 湖南科学技术出版社



图书在版编目(CIP)数据

数学魔法 / (美)克劳森著;周立彪译. —长沙:
湖南科学技术出版社, 2005. 5
ISBN 7-5357-4233-5

I. 数... II. ①克...②周... III. 数学—普及读物
IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 043350 号

MATHEMATICAL SORCERY by Calvin C. Clawson
Copyright © 1999 by Calvin C. Clawson
Simplified Chinese translation copyright © (year) by Hunan Science & Technology Press
Published by arrangement with Perseus Publishing, a subsidiary of Perseus Books L.L.C.
ALL RIGHTS RESERVED

湖南科学技术出版社通过台湾博达著作权代理有限公司获得本书中文简体版中国大陆地区独家出版发行权。

版权登记号: 18-2005-046

版权所有, 侵权必究

科学天下 新观念数学

数学魔法

著 者: [美]卡尔文·克劳森

译 者: 周立彪

策划编辑: 孙桂均 李 媛

文字编辑: 陈一心

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731 - 4375808

印 刷: 长沙化勘印刷有限公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 长沙市青园路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2005 年 5 月第 1 版第 1 次

开 本: 880mm×1230mm 1/32

印 张: 12

字 数: 247000

书 号: ISBN 7 - 5357 - 4233 - 5/N · 122

定 价: 19.80 元

(版权所有·翻印必究)

数学魔法

目录

楔子

1

数学和音乐、美术一样
都能够为我们的人生添加意义,增加深度。

第1章

12

数字是怎么来的?

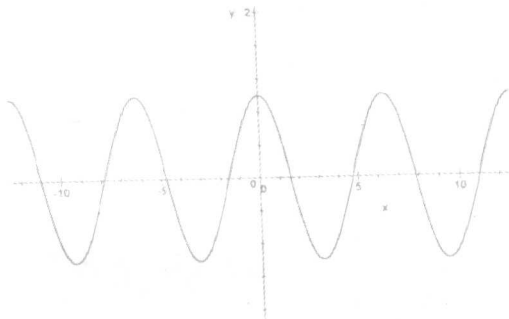
我们是懂得计数的人猿。

第2章

28

不可思议的古希腊人

对古希腊人而言,
数学理念的趣味并不是来自它的有用与否。



71 **第3章**
数字要证明什么？

证明的理念就是：
以演示的方式，说服读者接受结论的真实性。

101 **第4章**
薪火相传

在笛卡儿和费马之前，代数与几何分家。

144 **第5章**
敞开无限的大门

无穷级数的题材本身即趣味无穷

数学魔法

目录

第6章

169

数与数的神秘关系

如果女儿为定义域，
把她们映射到值域里的母亲，
这就是函数了。

第7章

222

乾坤大挪移

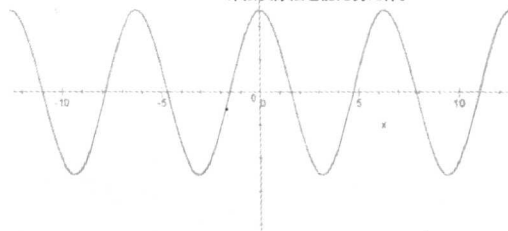
把矩阵的概念与其他函数结合在一起，
就能制造出新奇的数学怪兽。

第8章

266

乐在无穷

乘法及除法也能无穷延伸。



290

第9章 艾萨克·牛顿

牛顿留给我们的世界，
比伽利略诞生时的世界减少了很多疑惧，
增加了更多希望。

318

第10章 冠冕上的闪烁宝石

对数学家而言，微积分是知识上的光荣胜利。

360

第11章 我看数学

要谈论数学为我们做了些什么，
而不要去问数学是什么。

366

致谢

楔子

我在一所社区大学教数学，每当开学上第一堂课的时候，我总是提出这样一个问题作为开场白：我问班上学生为什么要选修数学课，然后我把他们的回答写在黑板上。他们的理由听来都不错，也极为充分且合理。那些理由当中包括：我需要这门课的学分才能毕业；数学对我将来的工作会有帮助；数学能协助我管理私人财务；数学训练有助于我教育子女，诸如此类。可是，这些理由统统没有命中标的。

接着，我告诉学生上数学课的真正理由，我在黑板上写上两个大字：“兴趣”。他们一看就笑了，我知道他们笑些什么，脑中作何想法：“这怪物是从哪个星球蹦出来的呀？”可是，如果我不是数学教师，如果我教的是音乐或者美术，就不会有人笑了。

其实，数学和音乐、美术一样，都能够为我们的人生添加意义，增加深度，使生活更多姿多彩，一直延伸到迟暮之年。事实上，这个世界若没有数学，它会是一个很无聊的地方。然而我们的年轻学子大都厌恶数学，他们选修数学的最主要原因



是非修不可；按照学校规定，学生必须具备一定的数学能力才能毕业。如果数学不是列为必修课程，恐怕我老早就失业了！数学的名声为什么会如此难堪呢？

我们的孩子在成长时期都不喜欢数学，这全是因为大人教得不对。数学自小学开始就是必定要教的学科，每一位教师都要让学生学习到某种程度的数学。可是对许多教师来讲，数学本来就不是他们喜欢的学科，甚至也不是他们在大学里爱读的题材，一旦当起教师，很可能也不会热心教，只是依照规定授课罢了。

学生都是观察老师身体语言的能手，立刻看出数学不是老师中意的玩意儿，那么他们又何必认真学呢！老师是教室中唯一的大人，如果大人不喜欢数学，那么数学一定有什么地方不对劲。这样的现象在音乐课和美术课里不会发生，因为音乐或美术教师都用最大的热情来教导学生。

其实，数学、音乐和美术有类似的艺术形式，所以数学应该像音乐、美术一样，由喜爱它的教师来传授。很不幸，目前的情况还没有改善的趋势，我们依然该让孩子跟随那些自己就厌烦数学、对数学毫无热情的教师学习数学。有些运气较好的学生，上高中时会遇到好的数学老师，运气不那么好的，要等到大学里才有机会，可是有一部分学生，可能终生都没能受教于献身数学的老师。

四大迷思

20 世纪以来，美国一些成年人散布对数学的畏惧，硬制造出许多会永久伤害数学教育的错误观念。大多数的成年美国人

无法与数学产生共鸣，他们不但大放厥词，还将谬论极力散布到公众之中。我们周围充斥那些虚构的道理，不仅是危害数学，甚至妨碍我们发挥现代人的应有潜能。

简言之，那些错误观念包括：

一、数学枯燥无味。

二、数学家尽是些刻板的大胡子老头儿，隐居于大学校园里，与现实脱节。

三、世界上共有两类人：一类是懂得数学的人，一类是像你我这些不懂数学的人。

四、女孩子（女人）缺乏数学头脑，不过反正她们也不需要。

我有一个好消息要告诉你：这些错误观念都不正确！但是很不幸，大多数成人却都信以为真。让我们看一看第一种说词：“数学枯燥无味。”没有任何谬论比这句话更远离事实了；数学不仅十分有趣，甚至令人震惊、激动，可说是甜酸苦辣，五味俱全。

现在你大概窃窃暗笑，认为我在大做广告，向你推销冒牌货。可是你不妨悄悄溜到一群数学家中间，聆听他们的谈话，你会发觉他们讨论数学时都带着一股爱，那不是淡淡的爱，而是全心全意、热情洋溢的爱。怎么可能呢？大多数人厌烦的东西，数学家怎会如此欣赏呢？这其中的奥妙很多，有一部分正是本书准备介绍的。



人人都可以是数学家

我们现在继续掂量第二种错误观念：“数学家尽是一些刻板的大胡子老头儿，隐居于大学校园里，与现实脱节。”在你内心深处是否也藏着同样的想法呢？然而，大学校园里的数学家只占世界上全部数学家中一个很小的百分比而已，因为分散于世界各地的数学家，有许多在工商业界安身立命。如果定义得更广泛些，每一位数学教师也都算是数学家。

我有时候会接到读者来信，通常那些读者都自认为不属于职业数学家。麻省塞勒姆市（Salem）的雷纳德·西密尔先生，是 55 岁的退休商人，只有高中毕业程度，来信提供我两个数学构思。第一个是关于主恒星的复杂计算，老实说我始终搞不懂是怎么回事，这儿就不多言了。第二个构思则是检验素数的方法。

最近 20 多年来，数学家相当注意检验大数的方法，以判定哪个是素数，哪个不是素数。素数是只能被 1 和它自己整除的正整数，其他的数（除了 1）就叫做合数；例如 7 与 11 是素数，而 6 是合数。现在工商业界使用电脑传递编码信息时，多半利用大的合数（两个大素数的乘积）来编码，因此编码员有兴趣知道一个大数是不是素数，也有兴趣学习把大数做素因数分解的新方法。

因此当我看到雷纳德检验素数的方法，自然觉得有趣，就顺手检验了几个数，居然每次的结果无误！他是不是发现了新的检验方法呢？我决定使用代数符号语言，重写雷纳德的程序，经过几次运算之后，我终于得到一个和雷纳德算法⁽¹⁾有相同概

念的方程式。

这个方程式看来眼熟，于是我查阅了一本数论的书籍，发现雷纳德的算法正是费马^[2]一个著名定理的特例之一。费马是现代数论之父，他于大约 350 年前得到这个重要的定理，后人称之为“费马小定理”，我和数学打交道多年，从未留意过它，据我所知我的同事也没有碰过，然而雷纳德却遇到了。如果他在 350 年前就提出这个构思的话，那么现在这个算法就应该叫做“雷纳德小定理”了。

再举一个例子，是我大学时的同学蓝迪^[3]，他可称得上是象牙塔传统之外的数学家。

蓝迪在内华达州长大，成人之后大部分时间是个牛仔。他从未念完中学，一向不怎么醉心于书本和学习。有一天他为了一个女子与人发生冲突，失手将对方打死，被判杀人罪，在犹他州立监狱服刑，服刑期间为打发无聊，就开始读书。

有一天他拿起一本数学书来看，从此着迷于数字以及各种数学关系式。在监狱里他自修基础数学，假释之后参加犹他州立大学的入学考试，结果成绩优异，校方不在乎他缺少高中文凭，予以录取。我是在大学里认识蓝迪的，和他一起修过几门课，他那时在言行与穿着上仍然十分牛仔，不过他也是数学家。我们毕业之后，他在一家加拿大公司谋到数学分析师的工作。

从上述两个例子，我们应该可以得到很有价值的启示，那就是：数学不是名校教授们的私人领域，而是无数普通人可在每个地方享受的题材；任何人都可以做数学，只要他对某个题材有兴趣，愿意来体验数字本身以及数与数之间的关系。费马本来也只是业余的数学家，然而他成为解析几何的创建者之一、



微积分领域的开路先锋，同时也建立了数论的近代论题。所以，我们有必要采用更广泛的定义，来看究竟什么样的人数学家。

我觉得，只要收入的大部分是得自他或她从事做数学或教数学的工作，或者只是喜欢数学、为了绝对的兴趣而演算数学，这些人统统都可以称为数学家。替《科学美国人》撰写“数学游戏”专栏长达 25 年的葛登能，是 20 世纪最多产的数学书籍作家⁽⁴⁾，但他并没有受过正规的数学训练。然而无论如何，我敢大声说他比目前仍然在世的任何人，更懂得基础数学。

不要拿“没有数学头脑”当借口

我们已准备好去粉碎第三种错误观念：“世界上共有两类人：懂得数学的人，和其他像你我这些不懂数学的人。”这种说词我已记不得听过多少遍了。我的母亲就反复说这样的话：“我就是没有数学脑袋！如果有人说‘火车在几时几分离站……’，我就知道我完了，我头都昏了，站在那儿动都不能动。”

很多人相信，婴儿生下来就各不相同，有些有数学头脑，有些没有。那些不具数学脑筋的婴儿，无论一辈子怎样学习，都不可能搞懂数学，所以就任由他们去吧。这真是无稽之谈。

有些人似乎很快就能捕捉到抽象的概念，这点倒是真的。这些人学习数学就比较快，著名数学家的传记通常能让我们看到，他们早年就具备数学天分。然而别有用心的人把这种特例普遍化，创造两类头脑的谬论，作为他们不愿学数学的借口。于是，既然你没有数学头脑，有什么道理叫你去与数学辛苦搏斗，就可言之成理了。

我们应该了解，每个人的一生中，有很多不同的才能会在

不同时间，以不等的程度，出现在我们身上。不能因为有些人天生有音乐感，毫不费力就学会演奏音乐，于是其他人就不必学习音乐了；或者说“老虎伍兹”是天生的高尔夫球选手，所以我们这些爱打高尔夫球的凡人，都应该收起球杆！

事实上，一般人（包括你和我）的知识才能，是居于钟形曲线（正态分布）的中间地带，只要我们愿意，就能学到我们所学到的数学。当你看到一个人，轻易演算一堆看似复杂的数学——很容易设想他或她必定有“数学头脑”，但是你所看到的能力，其实是人家经过多年努力学习而得到的。一般人并没想到，数学其实与运动和音乐很相似，如果勤加练习，就能做得很好。我希望所谓数学头脑的谬论就此打住。

错误观念四：“女孩子（女人）缺乏数学头脑，不过反正她们也不需要。”今天的两性平等意识，让我们认清这种说法是错误的，然而在许多情况下我们还是信以为真。以美国为例，六年级的女生在标准数学测验里，平均成绩优于同班男生，可是到了高中三年级时，情况颠倒过来了，男生的成绩超越女生。

那么从六年级到高中三年级的那段期间，发生了什么事呢？老师、家长和社会大众都一致告诉女学生她们学数学不行，甚至一再告诫说：“无论如何你最好不要考得比男朋友好，叫他觉得难为情。”这样的态度不仅对成千上万的女孩子不公平，剥夺了她们享受数学乐趣的权利，更使她们无法在数学领域做出贡献，甚至令社会整体蒙受损失。

我们需要更多数学家担任教师，或在企业中担任创新的数学工作，可是我们用偏见使半数青年失去机会，让她们不能在数学领域中规划生涯，光是这样，我们就失去了多少年轻的数



学高手？

数学观念，就是我们学习的目标

只是驳斥这四个错误观念是不够的，还必须更深入批判，必须改变社会对何谓良好教育所下的定义。在过去的某些社会里，完善的教育中数学占有一席之地；在古希腊社会，教育不但包含音乐、修辞学和科学，也特别包含数学。在柏拉图学院的大门上，就刻有这么一句名言：“不懂几何学的人不许进入此门！”柏拉图学院是我们所知的世界上最古老、最伟大的学校之一。

我们的大学制造大批文艺及科学领域的毕业生，其中有许多人从未领悟过数学究竟是什么，充其量只不过学到了有限的计算过程，足以拼凑出某类问题的答案而已。当有人鼓励他们拓宽视野，多选修各种数学时，他们就反问：“我学了要干什么用？”

数学是科学使用的语言，是工业和商业上的伟大工具，同时，数学不但使学生有高超的能力，解决困难的现实问题，还能协助学生了解宇宙如何运行。我们的教育必须涵盖数学，不但因为数学赋予我们解决问题的能力，它还能协助我们认识我们居住的宇宙，对于宇宙发生的各种基本过程，有更深一层的了解。

数学是直接而即时的喜悦之源，所以数学观念的本身就是我们学习的目标。我打算用本书的篇幅提出几个数学观念，让作为读者的你也能享受到数学家的喜悦。

只要你能够做基础算术运算，对代数具备基本认识，就可

以优游穿梭于本书介绍的数学中。有时我会暂停前进，提示你在学校里学过的代数知识。有了这些知识，你将可以明白现代数学的伟大思路，包括解析几何、微积分、矩阵代数，等等。

推动数学的三股力量

在我们正式开始之前，容我再介绍一个论点。当我们看着数学从古代苏美尔人的简单算术，一直发展到 21 世纪奇妙复杂的数学世界，我们还会一再思考这个论点。这论点指出，许多数学的进展是由三种知识力的合力所推动的，它们是：一、推广；二、延伸至无穷；三、改良的符号体系。

所谓推广（或称一般化），是要把一个定义扩张，以涵盖更多、更广的物件对象或思想领域。有时候我们也可以把多个不相连的研究领域，合并为单一的观念领域。

第二种力量，数的延伸，发生于我们想把数系扩张至无穷的时候。过去，数学界有两组人马在对抗，其中一组想让思维局限于有限集合，另一组人则对无穷的概念跃跃欲试。这场争论到今天都尚未停止。

第三股力量，是我们想扩张数学的符号系统，让我们的系统涵盖某些情况下使用的简单形式，以及其他情况下所使用的较复杂形式。因此，数学的成长究竟是停滞还是快速前进取决于数学家创建符号代数的速度有多快。正如书写文字采用了元音及辅音，而得到改良的记法，数学也因为发明新符号，而增强了计算能力。

所以我们要留意观察这三股驱动力：推广、数的延伸以及符号体系，看它们如何推动数学的发展。



启用知识的器官，欣赏数学

最后，我们要以一个非常哲学的问题来作为这段旅程的结束：数学到底会使这个广阔的宇宙有何不同？数学是否只是人类发明的一种复杂游戏，当我们不存在时它也消失无踪？或者，数学本来就在创造宇宙及万物的蓝图之中，是其中的一部分？

我期望在后面的篇幅中，能让你一窥数学的精美内涵，让你体会数学家感受到的喜悦。和音乐与美术一样，我们必须学习，才知道数学题材内有什么宝藏，何以诱使数学从业人士产生这般情怀。

我尽力劝说大家喜爱数学，而我又用音乐与美术作类比，其实十分不利，因为后面这两种艺术呈现给欣赏者的是立即的官能感受，耳朵和眼睛能回应音乐和画作的精细美丽。可是，数学大多不会取悦感官，无论是对视觉或是听觉；数学无非是一种知识型的迷人消遣。我们也许能够用细腻的图画传递信息，但不要误以为数学本身就是图画。我们必须启用知识的器官来欣赏、领会数学，而不是使用感觉的器官。

你必须主动参与，才能和我一同沉醉；你要在心中建构出我带给你的那些奥妙关系。数学无法像音乐与美术一般被主动的欣赏，你必须主动加入。我在这里邀请你与我做伴，一起来挑战这一趟伟大的遨游。我们即将出发，以最深入的方式，发掘数学让人着迷的原因。