随机系统分析引论

盛 昭 瀚

东 南 大 学 出 版 社

《系统科学丛书》出版说明

当今人类社会已经由“机器时代”跨入“系统时代”。系统科学是新时代占主导地位的科学，它是范围广、渗透性强的综合性学科。现实世界错综复杂、千变万化，但是，只要站在系统科学的高度就能透过其复杂的表象，抓住其主要特征，研究其相互关系，找出其共同规律，探求事物的本质。

为了适应科学发展的形势，加强出书的计划性和系统性，在有关专家的大力支持下，我社决定出版《系统科学丛书》。本丛书的选题围绕系统科学的基础理论、方法及其工程应用，主要收录有关学术专著、研究生教材或参考书，是侧重理论性和方法论的高层次系列书。相信本丛书的出版不仅会对从事系统科学、控制论、信息论、运筹学、系统工程等学科的专业人员、研究生、高年级大学生有所帮助，而且也便于其它领域的科技工作者拓宽思路、有所借鉴，从而促进边缘学科、交叉学科的发展。东南大学出版社愿为繁荣系统科学尽绵薄之力，努力扶植学术著作的出版，欢迎国内外专家学者踊跃投稿。

本丛书将陆续出版，各册相互独立，自成体系，编号以出版先后为序。

东南大学出版社

1988.12.20

#《系统科学丛书》编审委员会

前　言

（一）

随着现代科学技术的发展，系统理论得到日益广泛的应用，人们越来越重视应用系统思想对所研究的对象进行信息化、定量化和最优化的工作。例如，对各种运动规律建立数学模型，通过模型来分析系统的势态和各种特性，辨识系统的未知参数，估计系统的未来状态，等等。

人们经常发现，在许多物理系统、技术系统、社会经济系统中，由于系统某些要素的复杂性、不确定性或其它原因，使对这些系统的数学描述只能在某种不确定意义下进行，或者由于系统分析工作的日益严谨，使得原本认为是确定性的系统也具有了一定的不确定性。

在各种不确定性中，具有统计规律的所谓“随机性”具有重要的现实意义。由此而带来的便是系统的输入、系统的参数、系统的状态和特性都不再是一些确定性的量，而表现为随机变量或随机过程。

这种受到某种随机因素作用的系统就是人们一般所说的随机系统，它是传统的系统理论和随机过程理论有机结合的产物。

描述随机系统的数学模型，主要含有随机过程的随机差分方程和随机微分方程。研究的主要内容有：

（1） 系统随机输入和环境对系统产生影响的分析及相应的概率统计模型的确定；

（2） 由随机输入而产生的系统随机输出的统计规律以及二者之间的相关关系；

（3） 根据系统输入输出数据，在给定的模型类中按某种准则来确定模型结构和参数；

（4） 由于随机因素的作用，系统的现时刻和未来状态的精确量已不可能，因此，要在概率意义下对其进行“最优”估计；

（5） 确定系统的控制律，使系统的目标函数在统计意义下“最优”。

实践已经证明，近几十年来，通过对上述这些问题的研究，随机系统理论极大地廷拓了原来的确定性系统的研究内容，深化了人们对科学技术与社会经济系统的客观规律性的认识，同时，随机系统理论自身也取得了惊人的发展。

（二）

面对如此浩瀚的理论和实践材料，要在一本篇幅不大的书中介绍随机系统理论，确实是很困难的。为了适应从事自动控制、系统工程等专业研究的高年级大学生与研究生的实际需要，同时又注意到不因内容过广而使介绍过于浅显，作者在为原南京工学院自动化研究所研究生编写的讲义《随机系统理论导论》基础上，以“系统分析”为主线，选择了原讲义的部分内容，删去了如随机系统辨识、控制、应用实例等内容。读者只要掌握了这些基本内容，就不难根据自己的兴趣和工作需要，探求其他更深刻更丰富的随机系统问题了。这就是本书起名为《随机系统分析引论》的主要原因。

在写作过程中，作者注意到以下几点：

（1） 对从事随机系统研究的读者来说，建筑在概率空间概念基础上的概率论是很重要的基础。为此，在第一章中比较扼要地介绍了这方面最基本的问题，即使对从古典概率出发，对概率论知识有所了解的读者来说，阅读第一章的内容也是有益的。

（2） 用较多的笔墨介绍了对随机系统理论来说极为重要的随机过程基本知识，并尽可能在不涉及如测度论等数学知识的情

况下，使叙述力求严谨。

（3） 在进入“系统”概念之后（主要是第七章以后），我们比较注重工科专业的特点，力求以实际背景为衬托，必要时，为了突出实践性，对数学的表述作了一些简化。

（4） 为了体系的完整，我们对平稳过程、非平稳过程、线性随机系统及非线性随机系统等都平行地作了介绍，但正如大家知道的，对鞅过程、非平稳过程、非线性随机系统的处理远比平稳过程、线性随机系统要困难得多。因此，我们对这些内容在安排上尽可能使之具有独立性，并将这些较难的章节在目录中用“*”号标明，读者即使跳越这些内容也不会妨碍对后面各章节的学习。同样地，在有些比较严格的定理证明中，也可能出现类似情况，一般地这也不会影响对这些定理的理解。

（5） 为便于读者领会书中内容，各章均附有习题。由于篇幅限制，习题解答另行编印。

书中错误和疏漏之处在所难免，恳望读者指正。

盛昭瀚　1988．12．

目　　录

第一章　概率论基础

概率论是研究随机系统的重要基础之一，读者也许已经熟悉这一方面的基本概念和基本知识，但考虑到学习本书的需要，我们将在本章中概括地叙述建筑在“概率空间”概念上的概率论基础知识的脉络以及对我们特别有用的一些结果。这样做，既有助于读者克服在学习后面内容时可能遇到的困难，又不至于化费很多的时间和精力。读者如果需要了解更详细的内容，可以查阅参考文献[1～5]。

1.1　概率空间

一、概率空间

在概率论中，**随机试验**（简称**试验**）起着重要的作用。它们是在一定条件组S之下进行的，但条件组S并不能唯一地确定试验的结果，也就是说，即使在精确地保持条件组之下重复进行某一试验，也会出现不同的试验结果。我们以ω表示试验的一个最基本的不可再分解的结果，它起着“原子”的作用，一般称为基本事件，用$\Omega=\{w\}$表示一切基本事件的总体。而所谓某个事件在试验中出现与否，当且仅当是指该事件所包含的某个基本事件出现与否。因此一个事件实际上对应Ω的一个确定的子集，这就使得关于事件的概率论运算对应于Ω子集的集合论运算，这种对应描述方法是 A. H. Колмогоров 于1929年提出来的，它对于概率论的发展有着极其深刻的影响。

在实际中，作为Ω子集的一般事件常常受限于实际问题的需

要，并非一定要包含Ω的一切子集。但是，为了数学处理的方便，我们常要求这些子集组成的类具有一些基本的性质，这主要就是

定义1-1-1 设Ω为抽象点ω的集合，$\Omega=\{\omega\}$。Ω的一些子集A所组成的集类$\mathscr{F}$称为Ω中的一个σ**—代数**，如果$\mathscr{F}$满足以下条件：

（1） $\Omega\in\mathscr{F}$；

（2） 如果$A\in\mathscr{F}$，则$\overline{A}\in\mathscr{F}$，（$\overline{A}=\Omega-A$）；

（3） 如果$A_m\in\mathscr{F}$，$m=1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m\in\mathscr{F}$$

对某个事件A，包含它的σ-代数不是唯一的，例如，包含A的最大的σ-代数是Ω的一切子集组成的集类，而包含A的最小σ-代数则是$\{A, \overline{A}, \Omega, \phi\}$。

空间Ω称为**样本空间**。它和定义在它上面的σ-代数$\mathscr{F}$一起称为**可测空间**，记作（Ω，$\mathscr{F}$）。$\mathscr{F}$中的元素称为$\mathscr{F}$**——可测集**或**可测事件**，如果$\mathscr{F}$是明确的，则简称为**可测集**或**事件**。由此可见，随机试验在某种意义上被某一可测事件的σ-代数所确定。

定义1-1-2 设$P(A)(A\in\mathscr{F})$是定义在σ-代数$\mathscr{F}$上的实值集函数，如果它满足：

（1） 对每个$A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$； （1-1）

（2） $P(\Omega)=1$； （1-2）

（3） 设可列多个$A_m\in\mathscr{F}$，若$A_iA_j=\phi$ $(i\neq j)$

$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m) \tag{1-3}$$

则称它为$\mathscr{F}$上的**概率测度**，简称**概率**。

三元总体（Ω，$\mathscr{F}$，P）称为**概率空间**。

根据概率空间的定义，Ω的子集A是否是一个事件，完全取决于A是否属于$\mathscr{F}$。而在定义$\mathscr{F}$时，并没有要求Ω的全体子集都属于$\mathscr{F}$，因此并不是任何子集A都一定是一个事件。在具体问题

中应如何选择$\mathscr{F}$，或应挑选Ω的哪些子集作为事件，这将取决于问题本身。一般，如果Ω只含有穷或可列多个点时，总把Ω的全体子集的类取作$\mathscr{F}$，如果Ω不是有穷或可列集时，则常常根据问题的性质选择$\mathscr{F}$。以下我们在讨论某个问题而需要用到$\mathscr{F}$时，总认为$\mathscr{F}$已经选定并满足问题的要求。

定理1-1-1 设为概率，则

（1） $P(\phi)=0$ （1-4）

（2） 如$A_m\in\mathscr{F}$，$m=1, 2, \cdots n$，$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$，则

$$P(\bigcup_{m=1}^{n}A_m)=\sum_{m=1}^{n}P(A_m) \tag{1-5}$$

（3） 对任意的A_1、A_2，

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) \tag{1-6}$$

证明：（1）因为$\phi=\phi\cup\phi\cup\cdots$，$\phi\cap\phi=\phi$，故由式（1-3）得

$$P(\phi)=P(\phi)+P(\phi)+\cdots$$

于是$P(\phi)=0$。

（2）在式（1-3）中取$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，并利用$P(\phi)=0$即得。

（3）因为$A_1\cup A_2=A_1\cup A_2\overline{A}_1$，$A_1\cap A_2\overline{A}_1=\phi$，故

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2\overline{A}_1) \tag{1-7}$$

又 $A_2=A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2$，$A_1A_2\cap\overline{A}_1A_2=\phi$，则

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2) \tag{1-8}$$

将此式代入式（1-7）即得证毕。

推论： （1） 对任意n个事件$A_m(m=1, 2, \cdots, n)$，

$$P(\bigcup_{m=1}^{n}A_m)\leqslant\sum_{m=1}^{n}P(A_m) \tag{1-9}$$

（2） A、B为二事件，$A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B),$$

$$P(A)\geqslant P(B) \tag{1-10}$$

（3） 对任意事件A，

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1-11}$$

证明： （1） 用归纳法证明。当 $n=2$ 时，由式（1-6）与 $P(A_1A_2)\geqslant 0$ 即得。现设 $n=k$ 时式（1—9）成立，则当 $n=k+1$ 时，令 $C=\bigcap\limits_1^k A_m$，$D=A_{k+1}$，于是

$$P(\bigcup_1^{k+1} A_m)\leq P(C)+P(D)=P(\bigcup_1^k A_m)$$

$$+P(A_{k+1})\leqslant\sum_{m=1}^{k}P(A_m)+P(A_{k+1})=\sum_{m=1}^{k+1}P(A_m)$$

（2） 由 $A\supset B$，得 $A=B\cup(A-B)$ 且$B\cap(A-B)=\phi$。故$P(A)=P(B)+P(A-B)$，再由 $P(A-B)\geqslant 0$，即得。

（3） 因$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cup\overline{A}=\phi$，所以$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，证毕。

定理1-1-2（连续性定理） 设 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\supset A_{n+1}$，$n=1$，2，…，令$A=\bigcap\limits_1^\infty A_n$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1-12}$$

又若 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\subset A_{n+1}$，$n=1$，2，…，令 $A=\bigcup\limits_1^\infty A_n$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1-13}$$

证明： 由$\{A_n\}$的单调不增性，对任一 n，有

$$A_n=(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\overline{A}_{m+1})\cup(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m)=(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\overline{A}_{m+1})\cup A$$

又$A_m\overline{A}_{m+1}\cap A=\phi$，$m=n$，$n+1$，$\cdots$，故由式（1-3）得

$$P(A_n)=\sum_{m=n}^{\infty}P(A_m\overline{A}_{m+1})+P(A) \qquad (1\text{-}14)$$

另外因为$\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m\overline{A}_{m+1})\leqslant P(\Omega)=1$，故$\sum_{m=n}^{\infty}P(A_m\overline{A}_{m+1})$是收敛级数$\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m\overline{A}_{n+1})$的余项，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}P) A_m\overline{A}_{m+1})=0 \qquad (1\text{-}15)$$

由此在式（1-14）两端令$n\to\infty$，即得式（1-12）

现证(式1-13)。首先由$\{A_n\}$的单调不减增知集列$\{\overline{A}_n\}$单调不增，故如令$A^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n$，则由式(1—12)得$P(A^*)=\lim P(\overline{A}_n)$而

$$A^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\overline{A} \qquad (1\text{-}16)$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})=1-P(P(A^*)=1-\lim_{n\to\infty}P(\overline{A}_n)\\&=\lim_{n\to\infty}[1-P(\overline{A}_n)]=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\end{aligned}$$

证毕。

二、条件概率

定义1-1-3 给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，A、$B\in\mathscr{F}$，$P(B)>0$，称

$$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1\text{-}17)$$

为事件已经出现的条件下，A出现的**条件概率**

根据式（1-17）与概率测度的定义，容易证明

定理1-1-3 如果$P(B)>0$，则$P(A|B)$作为A的集函数是

$\mathscr{F}$上的概率，即

（1） 对每个$A\in\mathscr{F}$，$0\leq P(A|B)\leqslant 1$； (1-18)

（2） $P(\Omega|B)=1$； (1-19)

（3） 如果$A_m\in\mathscr{F}$，$m=1, 2, \cdots$，$A_iA_j=\phi$ $(i\neq j)$，则

$$P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m|B)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m|B) \qquad (1\text{-}20)$$

既然条件概率是某种意义下的概率，那末上面介绍的一般概率性质对条件概率也适用。此外，条件概率还具备以下三条重要的运算法则，即定理1-1-4～6。

定理1-1-4（乘法法则） 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 2$，$P(A_1\cdots, A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots$$
$$P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \qquad (1\text{-}21)$$

证明： 由于 $P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，故式(1—21)右端所有条件概率都有意义，而由式(1—17)可知，右端等于

$$P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\cdots\frac{P(A_1\cdots A_n)}{P(A_1\cdots A_{n-1})}=P(A_1\cdots A_n)$$

定理1-1-5（全概率公式） 设$B_1, B_2\cdots$为有穷或可列多个互不相容事件，即$B_iB_j=\phi$ $(i\neq j)$，且$P(\bigcup_n B_n)=1$，$P(B_n)>0$，$n=1, 2, \cdots$，则对任一事件 $A\in\mathscr{F}$

$$P(A)=\sum_n P(A|B_n)\cdot P(B_n) \qquad (1\text{—}22)$$

证明： 由 $P(\bigcup_n B_n)=1$ 得$P(\overline{\bigcup_n B_n})=0$；又$B_iB_j=\phi$，故$AB_i\cap AB_j=\phi$ $(i\neq j)$。于是

$$P(A)=P(A\Omega)=P\{A[\bigcup_n B_n)\cup(\overline{\bigcup_n B_n})]\}=P(A\bigcup_n B_n)$$

$$+P(A\overline{\bigcup_n B_n})=P(A\bigcup_n B_n)=P(\bigcup_n AB_n)=\sum_n P(AB_n)$$

再将 $P(AB_n)=P(A|B_n)P(B_n)$ 代入即得，证毕。

定理 1-1-6（贝叶斯公式） 设B_1，B_2，…为有穷或可列多个互不相容事件，$P(\bigcup_n B_n)=1$，$P(B_n)>0$，$n=1$，2，… 则对任一事件 $A(P(A)>0)$ 与$B_m(m\geqslant1)$，有

$$P(B_m|A)=\frac{P(A|B_m)P(B_m)}{\sum_n P(A|B_n)P(A_n)} \qquad (1-23)$$

证明： 由定理1-1-5及条件概率定义即得。证毕。

三、独立性

一般地，$P(A)\neq P(A|B)$，这表明在通常情况下B的出现对A出现的概率是有影响的。反之，当$P(A)=P(A|B)$，则可认为这种影响并不存在，或者说，事件A与B是彼此独立的两个事件，这就引出了下面的定义：

定义1-1-4 若事件A，B有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \qquad (1-24)$$

则称它们彼此是**相互独立**的。

更一般地，关于 n个事件 A_1，…，A_n 的独立性，有

定义1-1-5 设$A_1\cdots$，$A_n\in\mathscr{F}$，称它们是相互独立的。如果对于任意正整数 $k(1\leq k\leq n)$及任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})(1-25)$$

易见,式(1—25)实际上包含了$\sum_{i=2}^{n}C_n^i=2^n-n-1$ 个等式。因此，由A_1,…，A_n的两两独立性并不能推出它们的整体独立性。当然，如果A_1，…，A_n相互独立，则其中任意m（$m\leqslant n$）个A_i也相互独立。

1.2 随机变量与分布函数

一、随机变量

由上可知，概率空间（Ω，$\mathscr{F}$,P）是建立在抽象点ω组成的样本空间Ω上的，这对于深入研究事件及其概率带来不少困难，而与之比较,我们更熟悉一般欧氏空间中的点集,如$R_1=[-\infty,+\infty]$。因此，为了研究问题的方便并借助一整套以欧氏空间为基础的成熟的数学理论，人们引入了一个从样本空间Ω到R_1(一般地从Ω到R_n）的映射$X(\omega)$。但是，一般的样本空间Ω并不是孤立存在的,它与σ-代数$\mathscr{F}$与概率测度P有着密切的联系,因此,在引入这种映射时必须同时考虑到相应的概率意义。例如，对任一$\omega\in\Omega$，我们不仅定义了实值映射$X(\omega)$与之对应，而且还希望了解对给定的$x\in R_1$，Ω的子集（ω：$X(\omega)\leqslant x$）的概率，而概率测度仅仅对σ——代数$\mathscr{F}$中的集有定义。因此，作为一个基本条件，必须要求ω一集(ω：$X(\omega)\leqslant x$)$\in\mathscr{F}$，由此出发有

定义1-2-1 给定（Ω，$\mathscr{F}$，P），$X(\omega)$是定义在$\Omega=\{\omega\}$上的单值实函数。如果对任何实数x,(ω：$X(\omega)\leq x$）是一事件,即

$$(\omega: X(\omega)\leqslant x)\in\mathscr{F} \tag{1-26}$$

则称$X(\omega)$为**随机变量**。

简言之，随机变量$X(\omega)$作为从Ω到R_1上的单值映射，它要求R_1中子集$A=(-\infty, x]$的原像集$A^{-1}=(\omega: X(\omega)\leqslant x)\in\mathscr{F}$。因此，随机变量的概念是对于已知的$\sigma$一代数而言的，一个最简单的情况是，如果$\mathscr{F}$由$\Omega$中一切子集所组成，这时$\Omega$的任一子集都是事件，故任意单值实函数$X(\omega)$都满足式（1-26)，因而$X(\omega)$是一个随机变量。

为方便计，随机变量$X(\omega)$关于ω的依赖性在不引起混淆或