

数学的 智慧

何培尧 编著·广东教育出版社

前 言

我们国家的青年一代中蕴藏着无穷无尽智慧。这种宝贵的智力资源如果开发得好，就会成为建设四化的巨大力量。我在这本小册子里，选用了一百多个有趣的数学问题，并用通俗对话的形式，编成四十个节目。其目的是希望青年朋友们能从书中受到一些启发，养成学习时多动脑筋的习惯和较强的求知欲望。

本书通过数学趣题介绍了某些数学方法和相应的概念，这是许多人智慧的结晶。对于中学生来说，一方面学好正课，一方面读点课外书，适当开展课外活动，将会使自己的智力得到发展，功课会学得更好，成绩也会相应提高。

“多想出智慧”。提高思维能力是启发智慧的核心。因此本书特别重视思维过程的合理展开。通过对话形式力求使读者体会到：某一种方法是怎样摸索到的？它所依据的原理是什么？怎样想才正确？怎样解才巧妙？……为便于读者继续探索，本书在每一个节目之后，还酌情安排了思考题，这些思考题的解答或提示，都可在“后记”中找到。

本书所涉及的知识内容，大部分不超过初中的数学范围，仅少数涉及高中数学的某些知识。因此初中和高中的同学都可以把本书作为课外读物，完全不必考虑是否要作节目来表演。除此之外，本书还有三种用途：第一，可作为“数学晚会”的基本材料，每个节目都可以单独由一、两位同学表演，这也是本书采用对话形式的原因之一。指导老师可以

从中选用，并进一步考虑表演的细节，使教育和艺术结合起来。“数学晚会”可以单独开（结合数学讲座、数学史介绍、数学谜语、适合于群众性的数学游戏等），也可以和物理、化学、生物等学科联合开，叫做“科学晚会”。可以在教室里开，也可以在比较宽敞的家庭小客厅里开（人数少一些），并请少数家长参加。我们认为，学校教育、家庭教育和社会教育紧密地结合起来，是对青年一代进行卓有成效的教育的重要途径。第二，可以作为数学讲座的素材。以本书所提供的某些内容为基础，进一步找出有关的资料加以充实，就可以向数学小组开讲座了。第三，可作为中学生数学游园活动的素材。书中部分节目，本身就是数学游戏，其他所有题目都可供“有奖趣题征解”选用。

本书在编写过程中，得到广东省教育厅教研室、汕头市教育局教研室金振仁主任、汕头市金山中学葛浙森校长、李邦磐副校长的热情支持，汕头市教育局教研室谢光家同志给予具体协助。对此编者深为感谢。由于水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

作 者

引 子

王小珊今天特别高兴。她是市第五中学初中一年级的“三好”学生，也是这个年级的数学探索小组组长。今晚在她家里将要举行一次由她的数学小组组织的“数学美晚会”。她在晚会里将参加好几个节目的表演。早在几天前，她就在小组的指导老师——她的班主任张老师的帮助下，把这些节目准备好了。她想，自己准能表演得成功。小珊的哥哥志坚在市第一中学读高中一年级，是个优等生，又是无线电的业余爱好者。就在上个月，他精心制作的航模飞机在全市青少年科技表演中获得一等奖。他热情帮助妹妹准备晚会的节目，还自告奋勇要拿出几个节目来“客串”。

“数学美晚会”为什么选择在小珊家里举行？张老师是经过一番考虑的。除了小珊兄妹都是钻研数学的积极分子之外，更重要的是小珊的父母都热情支持青少年的课外科技活动。小珊的父亲老王是市电子计算机中心的高级工程师，几个月前欣然受聘为这个小组的校外辅导员。整个晚会的内容就是由他和张老师共同商定的。老王的爱人更喜欢孩子们，她是本市规模宏大的科学玩具厂的设计师。这个厂的产品畅销国内外。她不但设计了儿童喜爱的小型玩具，而且还为几个市的青少年宫设计成好几套现代化的科学游乐设备，玩的人可多了，教师和家长们也交口称赞。当张老师找她商量，准备在她们家里开小型晚会时，她满口答应。

张老师给晚会起了个很动听的名 称，叫做“数 学美晚

会”。她认为：数学具有内在的美，要让同学们感受到这种美。如果原来那些对数学感到枯燥无味甚至有些害怕的同学，参加晚会之后，会觉得数学很有趣，慢慢地爱上了它；而那些本来就喜爱数学的同学因此而进入一个更加广阔的美妙的天地，去探寻无价的珍宝，那就是晚会的巨大成功。晚会并不能代替正常的学习，它的作用在于激发学生对数学的兴趣，启迪他们的智慧。兴趣和智慧好比是打开数学王宫大门的两把钥匙。孩子们多动脑筋，更聪明了，也更爱学习了，学习质量就会更高。

“数学美晚会”快要开始了。你也许对它产生了兴趣，那就欢迎你到小珊家去参加吧！

目 录

前言	1
引子	1
一、二进制的妙用	1
1. 巧猜年龄	1
2. 点头和摇头	4
3. 半个鸡蛋	8
4. 秤出超重的药丸	12
5. 最少的砝码	15
二、数论趣题	18
6. 生日信息	18
7. 韩信点兵	21
8. 百牛、百鸡和百果	28
9. 农历年和公元年	31
10. 奇数和偶数	38
11. 勾股数组	41
三、思维的智慧	47
12. 孙臆的致胜妙策	47
13. 命题和推理	51
14. 分得清是非	55
15. 诡辩	58
四、最短线路	62
16. 最经济的折线	62
17. 三通等角线路	67
18. 邮递线路和七桥问题	70

19. 最短路线有几条.....	75
20. 异途同归.....	78
五、最大与最小.....	83
21. 定和, 求最大积.....	83
22. 怎样围成最大的面积.....	86
23. 定积, 求最小和.....	89
24. 三种平均值.....	93
六、灵机妙算.....	99
25. 算得巧.....	99
26. 妙算图形.....	102
27. 要找到一个办法.....	108
28. 出奇的简单.....	111
29. 纵横图(幻方).....	114
七、几何趣谈.....	119
30. 等分太极图.....	119
31. 怎样分蛋糕.....	121
32. 地砖的难题.....	124
33. 镶嵌图案的数学.....	127
34. 奇特的方向.....	130
35. 飞向月球.....	133
八、趣中求理.....	137
36. 空瓶分油.....	137
37. 多少对兔子.....	139
38. 烙饼的效率.....	142
39. 四个花瓶五朵花.....	144
40. 用唐诗猜字母.....	150
后记.....	153

一、二进制的妙用

1. 巧猜年龄

“数学美晚会”开始了。第一个节目是“巧猜年龄”，由志坚表演。只见客厅正面的墙上，由左到右挂着6张表，每张表上都写着32个数。有二位数，也有一位数。它们都依大小顺序排列起来，有的数只出现在一张表上，有些数却出现在不同的表上。六张数表的前面有一张桌子，桌上并排一排6个灯泡，它们是并联着的，每个灯泡都有开关。

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

表 1

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

表 2

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

表 3

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

表 4

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

表 5

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

表 6

节目开始时灯泡都不亮。志坚站起来先向老师同学们问好，接着说：“这个节目叫‘巧猜年龄’，63岁以下的年龄我都能猜到。请哪一位同学想定家里一个人的年龄，你爸爸、妈妈、哥哥、姐姐、弟弟、妹妹的年龄都可以，但不要说出来。然后请你在六张数表中仔细找一找，看哪几张表上有这个年龄，第几张表有，就按亮第几个灯泡。表和灯泡的顺序都是从左到右。要找遍所有的表，保证不漏掉，不按错灯泡。我根据灯泡的亮和不亮，就能猜出你心里所想的年龄。现在请哪位同学来试试看？”

同学们边看边议论。芳芳向前走去，从第一表看到第六表，然后按亮1、2、5三个灯泡。她对志坚说：“请你猜猜我爸爸是多少岁？”志坚看了一下灯泡，马上说：“你爸爸今年42岁。”芳芳惊奇地说：“猜得真准。我爸爸昨天才过生日，告诉我他42岁。”客厅里活跃起来了。有人低声说：

“小珊的哥哥会不会认识芳芳的爸爸？”张老师听了这话，笑着说：“志坚并不认识芳芳的爸爸，事先当然不知道多少岁了。为了避免误会，下面猜的时候，只要想定一个年龄，

不必告诉志坚是谁的。”这时志坚熄掉了所有的灯泡。

鸿杰坐得近一些，他的视力是1.5，早把几张表都看过了。他走到桌前，按亮了1、4、5、6四个灯泡，然后走回自己的座位。他还没有坐下，志坚就说：“你心里想的年龄是39岁。”鸿杰说：“可真怪，你怎么想的和我一样呢？”他坐下后继续向数表和灯泡张望，思索着究竟有什么奥秘。

年龄最小的美瑜站起来，她记住了那几张表上有她所想的年龄。“让我试试看。”她上前按亮了3、4、6三个灯泡，并且仔细打量着灯座，想发现有什么秘密。志坚笑着说：“欢迎你检查。我知道你想的数目是13。”美瑜赞叹地说：“啊，太妙了！我根本没有告诉任何人，你怎么知道的？”

又猜过几次后，张老师对志坚说：“这个节目很成功，现在可以结束了。你向大家说一说秘密在哪里吧！”大伙安静下来。志坚思索了一下，开始讲：“这六张表的左上角写着32，16，8，4，2，1，小于64的正整数都可以化成其中某几个数的和。例如 $39 = 32 + 4 + 2 + 1$ 。编表时就在表1、表4、表5、表6上都写上39这个数。当你按亮1、4、5、6这几个灯泡时，我就把32、4、2、1四个数加起来，不就是39吗？这就是全部秘密。这里面还包含着电子计算机所用的二进数的原理，要请我爸爸来讲才清楚。”

张老师夸奖志坚表演熟练，解说明白，“现在请工程师给咱们讲讲二进数原理。”老王说：“那好，我就简单地讲一讲吧。二进数只有两个数码，就是1和0，六张表中最大的数是63，它等于 $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ ，用二进数表示就是111111，从左边算起，第一个1表示 2^5 即32，第二个1表示 2^4 即16，第三个1表示 2^3 即8，第四、五个1分别表示

2^2 即4、 2^1 即2，最右边的1表示1。总之左边的1是紧挨着的右边的1的2倍，也就是逢2进1。 $50=32+16+2$ ，用二进制表示成110010，因为和式里不包含 2^3 、 2^2 和1，就用零填补在从左到右的第3、4和最后一个数位上。当你按亮第一、二、五个灯泡时，表演者就用心算把相应位置的三张表左上角的数32、16和2加起来，恰好就是50。心算能力强的同学，根本不用看数表，他看见第一个灯泡亮就想32，第二个灯泡亮就加上16得48，第五个灯泡亮就再加上2得50。六个灯泡：亮、亮、暗、暗、亮、暗，就表示二进制110010，也就是十进数的50，亮和暗两种物理状态，可用来表示二进制码1和0。这在技术上是比较容易实现的。所以电子计算机采用二进制进行运算。等大家长大了之后，我们国家的电子计算机将会逐渐普及起来。大家还可以想一想：如果要猜127岁以下的年龄，该用多少张表？怎样编法？这样你们就能够学到更多的东西了。”

2. 点头和摇头

这个节目由小珊表演。她不慌不忙地对大家说：“我这个节目叫做‘点头和摇头’。十次点头和摇头，就可以猜出1000以内的任何正整数。请一位同学想定一个数，要正整数，不超过一千。自己在手心里写好这个数，捏紧不告诉别人。然后我向他提出十个问题。他用点头或摇头来回答我；对的就点头，不对的就摇头。十个问题答完后，我就知道他想的是什么数。”

坐在王老师旁边的佩佳，在手心里写好了一个数：718，谁也没有看见。她对小珊说：“我来试一试，你问吧！”

小珊问：“你所想的数大于500吗？”佩佳点点头。

问：“你所想的数大于750吗？”佩佳摇摇头。

问：“大于625吗？”佩佳点头。

问：“大于688吗？”佩佳再点头。

问：“大于719吗？”佩佳摇头。她心里一跳，因为已经很接近她所想的数了。

问：“大于703吗？”佩佳点头。心想，又离远一些了。

问：“大于711吗？”佩佳点头。

问：“大于715吗？”佩佳又点头。她心里又紧张起来了。

问：“大于717吗？”佩佳点了头，心里想：快被小珊猜中了。

问：“大于718吗？”佩佳赶快摇头。她希望小珊不要想到718。

谁知道小珊马上宣布：“你想着的数就是718。”

翠虹觉得很有意思。她想好了一个最简单的数1，不用写在手心里也会记得。她对小珊说：“我想好了，你来猜吧。”

问：“你所想的数小于500吗？”翠虹点头。

问：“小于250吗？”翠虹点头。心里想：小珊的范围缩小了2倍。

问：“大于125吗？”翠虹赶快摇头，心里想：“这一下范围又缩小了2倍。”

问：“小于62吗？”翠虹点点头。

问：“大于31吗？”翠虹答以摇头。

问：“小于16吗？”翠虹用点头来回答。

问：“大于8吗？”翠虹一边摇头，一边继续捉摸着。

问：“小于4吗？”翠虹改为点头。她猜到了小珊的秘密。

问：“大于2吗？”翠虹摇头。

问：“大于1吗？”翠虹还是摇头。她高兴地想：小珊一定会猜中；可我也会猜了。

果然小珊说出了翠虹所想的数，它就是1。

接着小珊又猜中了几位同学所想的数。翠虹暗中用自己捉摸到的方法跟着猜，但她没有声张。终于她站了起来说：

“小珊姐猜得好。我刚才研究一下这里头的道理，我也会猜，让我试试行不行？”

张老师鼓励说：“那太好了。大家要学习翠虹喜欢动脑筋的精神。”小珊也马上表示欢迎：“翠虹你来吧，祝你成功。”

玲玲很快把想好的数写在手心里：“333”。让翠虹猜。

问：“大于500吗？”翠虹取1000的一半。玲玲摇头。

问：“大于250吗？”翠虹再取500的一半。玲玲点头。

问：“大于375吗？”这是 $500+250=750$ 的一半。回答是摇头。

问：“小于313吗？”这比 $375+250=625$ 的一半大一点。玲玲又摇头。

问：“大于344吗？”这是 $375+313=688$ 的一半，玲玲还是摇头。

问：“大于328吗？”这比 $313+344=657$ 的一半小一点。玲玲改为点头。

问：“大于336吗？”翠虹换了一种算法： $328+$

$$\frac{(344-328)}{2}=336. \text{ 玲玲又改为摇头.}$$

问：“小于332吗？” $328 + \frac{336-328}{2} = 332$. 玲玲又摇头。

问：“大于334吗？” $332 + \frac{336-332}{2} = 334$. 玲玲再次摇头。

问：“小于333吗？” $332 + \frac{334-332}{2} = 333$. 玲玲继续摇头。

翠虹说：“那就是333，准没错。”小珊鼓掌说：“翠虹真聪明。”

又猜了一会，张老师让大家都想一想：小珊和翠虹是用什么方法猜的，然后请这两位表演的同学向大家介绍。小珊说：“我们每次都是取平均值。第一次取500，就是1000和0的平均数，如果大于500，第二次就取500和1000的平均数 $\frac{1}{2}(1000+500)=750$ ；如果小于500，就取 $\frac{1}{2}(500+0)=250$ 。以后每次发问都把范围缩小到原来的一半左右。如果碰到奇数+偶数，平均数不是整数，就把它们的和加上1或减去1，再被2除。这个方法叫做对分法。”翠虹补充说：

“我计算平均数时，喜欢采用‘小数 + $\frac{1}{2}(\text{大数}-\text{小数})$ ’的算法，如果两数的差不大，这样算会快一些。如果碰到差是奇数，就加上或减去1再被2除。”

张老师最后提出一个问题：“为什么要问十次？问九次行不行呢？”大家沉默了一阵。志坚先开腔：“如果猜1000

以内的正整数，我看一定要十次，九次是不行的。因为 $2^9=512$ ， $2^{10}=1024$ ，问九次只能猜512以内的数。”张老师高兴地说：“志坚说得真好。说明你找到了问题的实质，能够灵活运用。这个节目也可以用来猜城市的电话号码。假定市内自动电话号码都是五位数，要问多少次才能猜到？为什么要这么多次？请大家过后想清楚这个道理。点头和摇头，是回答问题的一种方式。当然也可用别的方式，例如直接回答‘是’或‘不是’，效果也是一样的。”

志坚又补充说：“这个猜法还可以改进一下，第一次问‘大于512吗？’回答点头时，加512的一半，摇头时减512的一半，作为第二次问所用的数；以后每次问都用‘大于’，碰到点头的回答，就加上2的n次幂，碰到摇头的回答就减去2ⁿ，这里的n依次取 $n=7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ ，最后一次问，一定是在前一次问所用的数加上1或减去1，这样计算比较简单，且所猜的数恰好可以用二进制表示；碰到‘点头’记以1，碰到摇头记以0，例如第2，3，6，7，8，9次点头，其它各次摇头，那么要猜的数用二进制表示是 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0，也就是十进制数 4 1 4。”

3. 半个鸡蛋

这个节目的名称有点奇怪，表演者是小珊和丽丽。

两人分别从左右出场，好象久别重逢，相见甚欢。小珊说：“你好，丽丽。好几天没见到你了。噢！你心里有什么事

吧！为什么愁眉苦脸的？快告诉我吧，看我能不能帮你解决？”

丽丽高兴地说：“那太好了，我被一个怪题难住了。不解出这道题，心情就不舒畅。”小珊最喜欢解题，那怕是离奇古怪的题目，她也解得津津有味，而且往往想得很巧妙。于是丽丽对她说：“事情是这样的：星期天早上，我一早起床，到广场跑步。路上碰见王老师，我向她问好，顺便问她上哪去？她却给了我一道奇怪的算题：‘我送鸡蛋给几位体弱的老师和同学。咱学校里蔡老师教龄四十多年，我当过她的学生。我先到她那里去，把所带的鸡蛋的一半加上半个给了她。接着我上伟明同学家里，他体质比较弱，我把剩下的鸡蛋的一半加上半个送给他。后来我碰到树强同学的妈妈，告诉她：树强参加语文比赛得了一等奖。我又把剩下的一半加上半个送给树强，表示鼓励，物轻意重嘛！这样我就空着手回来了。你算算看，我原先带了多少个鸡蛋？’我一时算不出来，王老师说：‘你不必焦急，回去慢慢算吧。算出来后告诉我。’我回到家里算来算去，总觉得很乱。昨晚列了方程，好不容易算出来了，可是式子太复杂了，你能不能帮我找到简单一些的算法？”小珊说：“你把演算式写出来，我们一起来研究吧。”

丽丽拿出自己的算草（事先用毛笔写在大张白纸上，好让大家看清楚），小珊把它挂在墙上。上面是这样写的：

解：设王老师原有鸡蛋 x 个

依题意得方程

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2} \right] -$$

$$\left\{ \frac{x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) - \left[\frac{x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{2} \right]}{2} + \frac{1}{2} \right\} = 0$$

去括号

$$x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

去分母

$$8x - 4x - 4 - 4x + 2x + 2 - 4 - 4x + 2x + 2 + 2x - x - 1 + 2 - 4 = 0$$

合并同类项 $x - 7 = 0$

移项, 得 $x = 7$

答: 王老师原有 7 个鸡蛋。

小珊一步一步地检查了丽丽所列的算草, 没有发现错误。她最后告诉丽丽: “这样列方程虽然可以解出来, 但列式太过繁杂, 很容易算错。我理解你的思路是: 从原有鸡蛋个数中减去送给蔡老师、伟明、树强的鸡蛋个数, 恰好等于 0, 也就是没有剩下鸡蛋。这样去括号后共有 15 项。如果再多一次 ‘一半加上半个’ 就要有 31 项; 如果又来一次 ‘一半加上半个’, 就变成 63 项, 简直难以计算了。我们把思路改变一下, 列出的方程就要简单得多。”

(小珊边说边拿出一张事先用毛笔写好的算草, 挂了起来。)

解: 设王老师原有鸡蛋 x 个

依题意列方程:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} = 0$$