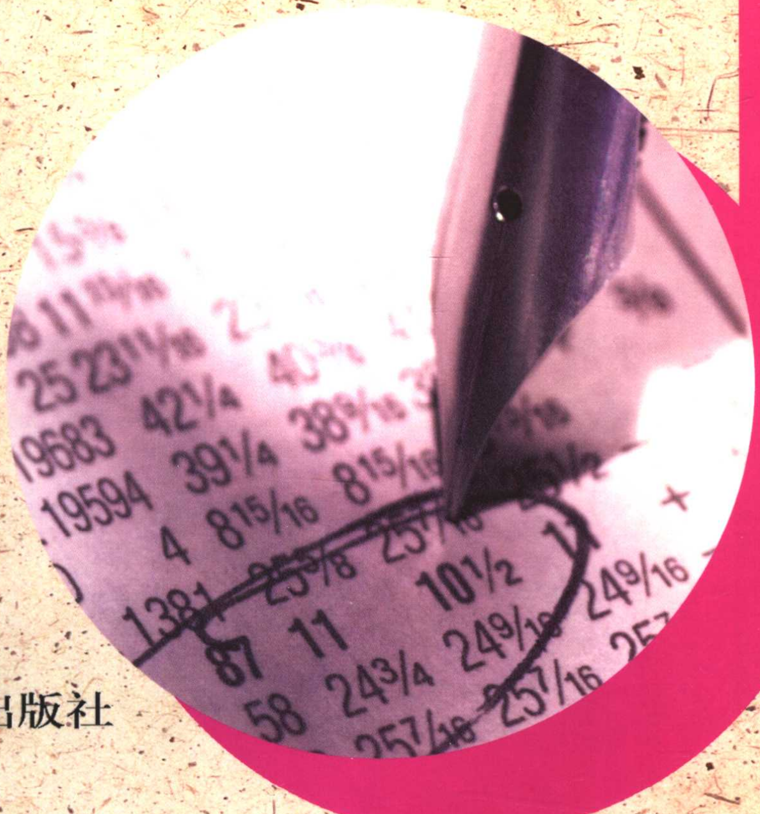
高等职业教育
经济管理类
专业教材

JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学

詹勇虎 主编



東南大學出版社

高等职业教育经济管理类专业教材

经济应用数学

主　编　詹勇虎
副主编　费　俭
参　编　（按姓氏笔画排序）
王　平　田　忠
杜　斌　龚建荣

东南大学出版社

内 容 简 介

本教材是一本专为高等职业教育经济管理类专业编写的应用数学教材，内容包括线性代数、应用概率统计和数学实验. 本书以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，体现了以应用为目的、理论必需、适度够用的原则. 全书各部分均从经济管理实际原型问题入手，将经济数学的思想和经济管理的实际问题结合起来，充分体现了作者多年从事教学和科研工作的成果和经验. 在内容编排上，删繁就简，精选了经济管理专业必备的知识，特有的数学实验部分提高了学生在经济数学的基础上运用计算机解决实际问题的能力.

本书既可以作为高等职业技术学院、高等专科学校经济管理类专业的教材，亦可作为成人教育、企事业单位培训和学生自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 詹勇虎主编. —南京：东南大学出版社，2004.1

ISBN 7-81089-389-0

Ⅰ.经… Ⅱ.詹… Ⅲ.经济数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 104822 号

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼 2 号　邮编 210096）

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销　　丹阳兴华印刷厂印刷

开本：787mm×1 092mm　1/16　印张：12.75　字数：318 千字

2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—5 000 册　定价：21.00 元

（凡因印装质量问题，可直接向发行科调换. 电话：025-83795802）

高等职业教育经济管理类专业教材编委会

出版说明

高等职业教育经济管理类专业课程改革与建设研讨会于2003年3月15在南京召开，参加会议的有南京正德职业技术学院、南京工业职业技术学院、南京钟山职业技术学院、南京金肯职业技术学院、江苏经贸职业技术学院、南通纺织职业技术学院、无锡商业职业技术学院、常州纺织职业技术学院、南京商友资讯电子商务应用研究所、东南大学出版社等22所院校经济管理系的系主任和相关代表。

会议讨论了当前高等职业教育的现状、问题以及课程改革、教材编写等相关议题，通过了"高等职业教育经济管理类专业课程建设协作组和教材编委会组建意见"，同意成立"高等职业教育经济管理类专业课程改革与建设协作组和教材编委会"。协作组成员为各院校经济管理系的系主任，编委会成员由协作组成员和教材的主编组成，一致推举宁宣熙教授为"高等职业教育经济管理类专业课程建设协作组"组长和编委会主任，并决定编写高等职业教育经济管理类专业教材，首批出版教材20本。

"高等职业教育经济管理类专业课程建设协作组"首批会员单位名单：

南京正德职业技术学院	南京工业职业技术学院
南京钟山职业技术学院	南京金肯职业技术学院
江苏经贸职业技术学院	南通纺织职业技术学院
南京人口管理干部学院	镇江市高等专科学校
无锡商业职业技术学院	常州轻工职业技术学院
南京化工职业技术学院	常州信息职业技术学院
常州建东职业技术学院	常州纺织服装职业技术学院
常州工程职业技术学院	南京铁道职业技术学院
南京交通职业技术学院	无锡南洋职业技术学院
江阴职业技术学院	淮阴工学院
东南大学经济管理学院高职部	扬州职业大学
南京商友资讯电子商务应用研究所	东南大学出版社

本次教材建设，江苏省各高等职业技术院校领导给予了大力的支持，积极组织教师参加教材的编写。主编既有原本科院校的专家教授(现受聘于高等职业技术院校任教)，也有长期从事高等职业教育的教师，在此向他们表示衷心的感谢！由于时间仓促，本次专业教材建设还有许多不足的地方，敬请广大高等职业技术院校同行提出批评意见，并欢迎加入"高等职业教育经济管理类专业课程建设协作组"，共同开展高等职业教育经济管理类专业课程改革与教材建设。

高等职业教育经济管理类专业教材编委会
2003年10月

序

高等职业教育是整个高等教育体系中的一个重要组成部分。近几年来，我国高等职业教育进入了高速发展时期，其中经济管理类专业学生占有相当大的比例。面对当前难以预测的技术人才市场变化的严峻形势，造就出大批具有技能且适应企业当前需要的生产和管理第一线岗位的合格人才，是人才市场也是时代的需要。

为培养出适应社会需求的毕业生，高等职业教育再也不能模仿、步趋本科教育的方式，要探索适合高等职业教育特点的教育方式，就要真正贯彻高等职业教育的要求，即"基础理论适度够用、加强实践环节、突出职业技能教育的方针"。为此，有计划、有组织地进行高等职业教育经济管理类专业的课程改革和教材建设工作已成为当务之急。

本次教材编写的特点是：面向高等职业教育系统的实际情况，按需施教，讲究实效；既保持理论体系的系统性和方法的科学性，更注重教材的实用性和针对性；对理论部分实施为实用而设、为实用而教；强调以实例为引导、以实训为手段、以实际技能为目标；深入浅出，简明扼要。为了做好教材编写工作，还要求各教材编写组组织具有高等职业教育经验的老师参加教材编写的研讨，集思广益，博采众长。

经过近一年的努力，首批 20 本教材正式出版发行。这是在 20 多所高等职业院校支持下，几十位高等职业技术院校教师共同努力、上百位有高等职业教学经验的高校老师共同参与高效率工作的结果。

值此出版之际，我们谨向所有支持过本套教材出版的各校领导、教务部门同志和广大编写教师表示诚挚的谢意。

首批教材的出版，只是我们在高等职业教育经济管理类专业教材建设上走出的第一步。我们将继续努力，跟踪教材的使用效果，不断发现新的问题；同时也希望广大教师和读者不吝赐教和批评指正。我们将不断根据新的形势变化与发展要求对教材进行修订，期望它能在几番的磨炼中，成为一套真正适用于高等职业教育的优秀教材。

宁宣熙

2003 **年** 11 **月**

前　言

2000年,国家教育部规定了高等职业教育的培养目标:培养拥护党的基本路线,适应生产、建设、管理、服务第一线需要的,德、智、体、美等方面全面发展的高等技术应用性专门人才,学生应在具有必备的基础理论知识和专门知识的基础上,重点掌握从事本专业领域实际工作的基本能力和基本技能,具有良好的职业道德和敬业精神.在当前高等职业教育迅速发展的形势下,为了适应这样的培养目标,本着基础理论适度够用,重点突出应用能力培养的原则,我们组织了部分在高职高专院校教学一线工作多年的教师,编写了这本《经济应用数学》教材,内容包括线性代数、应用概率统计和数学实验.本教材具有以下特点:

(1) 从实际出发,充分体现了作者多年的教学经验,既考虑到数学学科的科学性,又能针对现有学生的接受能力和理解能力,特别注意教材内容的深度和广度,既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的物理意义及经济背景,从而便于学生理解和掌握.

(2) 为了学以致用,提高学生的应用能力,本教材增加了数学实验部分,培养学生利用线性代数和概率统计的基本知识并运用计算机解决实际问题的能力,增强了学生的学习兴趣.

(3) 叙述通俗易懂,简明扼要,便于自学,每章配有适量的习题,书后附有习题答案.

本教材由南京正德职业技术学院詹勇虎任主编,南京化工职业技术学院费俭任副主编,参加编写的人员还有:正德职业技术学院杜斌老师,南京交通职业技术学院王平老师,南京化工职业技术学院田忠老师,南京铁道职业技术学院龚建荣老师.

本书既可作为高等职业技术学院、高等专科学校经济管理类专业的教材,亦可作为成人教育、企事业单位培训和学生自学用书.

由于作者水平有限,书中缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正.

编　者

2003年12月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　应用概率统计

第三篇 数学实验

第一篇　线性代数

1　行列式

在生产经营活动及科技活动中，许多问题都可以表示成变量间的线性关系，因此对线性关系问题的研究非常重要. 线性代数正是研究变量间线性关系的学科，而行列式又是研究线性代数的重要工具. 在本章中，首先复习二阶、三阶行列式，再进一步讨论 n 阶行列式的概念、性质和计算方法.

1.1　二阶、三阶行列式

看二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法，得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，方程组(1) 有惟一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

为了便于记忆这一求解公式，规定记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(－)次对角线　　(＋)主对角线

并称为二阶行列式，记作 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

按照行列式的概念，式(2)可写为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当二元一次方程组(1)的系数组成的行列式 $D \neq 0$ 时，它的解就可简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

解 系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13 \neq 0$$

∴ 方程组有解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

于是该方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{13}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{14}{13} = 1\frac{1}{13}$$

二阶行列式的概念可推广到更高阶的行列式.

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

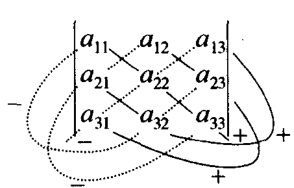
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用下面画线方法记忆. 其中：各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项.



例 2 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 0 \times 3 + 0 \times 6 \times 1 + 5 \times (-1) \times 2 - 5 \times 0 \times 1$

$$-0 \times (-1) \times 3 - 4 \times 2 \times 6 = -58$$

例 3 x，y 满足什么条件时

$$\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ 0 & x & -y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解 $\because \begin{vmatrix} 0 & y & x \\ 0 & x & -y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y^2 - x^2 = -(x^2 + y^2)$

$\therefore$ 若要该行列式为 0,则 $-(x^2 + y^2) = 0$,

$\therefore$ 当 $x = y = 0$ 时,给定行列式等于 0.

同二阶行列式一样,三阶行列式在求三元线性方程组时也有着重要的应用.

1.2 n 阶行列式

为了把二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式,先分析三阶行列式的特点:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

从上式看出:

(1) 该行列式的值等于第一行的三个元素 $a_{1j}(j = 1, 2, 3)$ 分别乘二阶行列式的代数和.

(2) 与 a_{11} 相乘的二阶行列式恰是 D 中划去 a_{11} 所在行和列后余下的元素按原位置组成的二阶行列式,称它为元素 a_{11} 的余子式,记作 M_{11},即 $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 与 a_{12}，a_{13} 相乘的二阶行列式亦是同理,即 $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

(3) 每项的符号为 $(-1)^{1+j}$，$j = 1, 2, 3$.

令 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

因此三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

即三阶行列式等于第一行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

如 1.1 节例 2，有

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\times 12 - 2\times 5 = -58$$

根据以上分析，引进 n 阶行列式的概念.

定义 由 n^2 个元素组成的一个算式，记为 D，有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$，a_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列的元素($i, j = 1, 2, \cdots, n$).

当 $n = 1$ 时，规定：$D = |a_{11}| = a_{11}$.

设 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中 $n-1$ 阶行列式 A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式.

例 1 写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

的元素 a_{23} 的余子式和代数余子式

解 元素 $a_{23} = -2$，其余子式是划去其所在第二行、第三列元素后，剩下的元素按原顺序组成的三阶行列式，即

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 2 用行列式定义计算

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 12 & 0\\ 15 & -9 & 6 & 13\\ 1 & 0 & 5 & -4\\ 10 & -14 & 8 & 11\end{vmatrix}$$

解　由定义，有

$$D=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}A_{1j}=-2\times A_{11}+0\times A_{12}+12\times A_{13}+0\times A_{14}=-2A_{11}+12A_{13}$$

而

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}-9 & 6 & 13\\ 0 & 5 & -4\\ -14 & 8 & 11\end{vmatrix}=463$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}15 & -9 & 13\\ 1 & 0 & -4\\ 10 & -14 & 11\end{vmatrix}=-563$$

$\therefore D=-2\times 463+12\times(-563)=-7\ 682$

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解　$\because a_{1j}=0(j=2,3,\cdots,n)$

$$\therefore\quad D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=a_{11}\cdot A_{11}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$\because A_{11}$ 为 $n-1$ 阶行列式

由定义，有

$$A_{11}=a_{22}\cdot\begin{vmatrix}a_{33} & 0 & \cdots & 0\\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

以此类推下去，有

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

该行列式称为下三角形行列式，即有结论：下三角形行列式等于其主对角线上元素的连乘积.

1.3 行列式的性质

利用 n 阶行列式定义计算较高阶行列式时，仍然相当繁琐，下面不加证明地引入 n 阶行列式的基本性质，以此大大简化行列式的计算.

把行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D'.

即若：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

显然：D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

例如 1.1 节例 2 中：

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-58$$

而

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

可以计算：$D^{\mathrm{T}}=-58$.

由 1.2 节知：下三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$\because D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

由性质 1，有

$$D=D^{\mathrm{T}}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$\therefore$ n 阶上三角形行列式的值仍等于它的主对角线上元素的连乘积.

由此性质可知,行列式的行具有的性质,它的列也具有相同的性质.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式的值变号.

例如:可以计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10$$

交换 D 的第二和第三行,则得:$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10$

推论 若行列式 D 中有两行(列)完全相同,则此行列式等于 0.

因为将行列式 D 中具有相同元素的两行互换其结果仍是 D,但由性质 2 可知其结果应为 $-D$.

因此,$D=-D$, $\therefore$ $D=0$.

性质 3 行列式某一行(列)的公因子可提到行列式外.

例如:$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

一般地:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

推论 1 若行列式中有一行(列)的元素全为 0,则此行列式等于 0.

实际上,把该行(列)的公因子 0 提到行列式外,则行列式为 0.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} \xlongequal{\text{性质 3}} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 2 推论}} 0$$

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2\times1 & -2\times2 & -2\times3 \\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times3 \end{vmatrix}=(-2)\times3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$

性质 4 若将行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1 计算三阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1\,598 & 801 & 402 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\,600-2 & 800+1 & 400+2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1\,600 & 800 & 400 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 400 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 2 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \\ a-b & a & b \end{vmatrix} \times 1$$

$$= \begin{vmatrix} -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \\ -b & b & a+b \end{vmatrix} = 0$$

性质 6 n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

换句话讲：行列式可以按任意一行(列)展开.

例 3 求三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解法一 按第三行展开，有