

# 高中数学 升学考试 解题技巧



董昊 杜杰峰 编著

中国妇女出版社

# 高中数学升学考试 解题技巧

董昊 杜杰峰 编著

中国妇女出版社

(京)新登字032号

高中数学升学考试解题技巧

---

编著：董 昊 杜杰峰

责编：周 俭

出版：中国妇女出版社

发行：新华书店科技发行所

印刷：涿州新华印刷厂

开本：787×1092毫米1/32

印张：10.25

字数：221 千字

版次：1992年2月北京第一版

印次：1992年2月第一次印刷

印数：1—13,000册

---

书号：ISBN 7-80016-650-3/G·397 定价：4.50元

## 前 言

为了帮助具有高中程度的青年掌握中学数学中常用的数学思想和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们精选了从基础到综合的不同层次水平的典型数学题目（主要为历届高考试题），同时作出了解法示范。有些题目还给出了多种解法，以期达到启迪思维，培养能力之目的。为了与平时教学一致，题目按代数、立体几何、解析几何分类整理，各章节内容均按统编教材的知识系统和顺序进行编排。每节的题目都按填空题、选择题、解答题、证明题的顺序分类排列。上篇为题目，读者可先独立进行解答试验，然后对照下篇的解答进行研究，这对培养和提高自已的数学能力是很有帮助的。对中学数学教师也有一定的参考作用。由于水平有限，不当之处请批评指正。

编者

1990年11月

# 目 录

## 上篇 试题

|                        |      |
|------------------------|------|
| <b>第一章 代数</b> .....    | (3)  |
| 一、幂函数、指数函数、对数函数.....   | (3)  |
| 二、三角函数、反三角函数、三角方程..... | (13) |
| 三、不等式.....             | (23) |
| 四、数列、极限、数学归纳法.....     | (26) |
| 五、复数.....              | (34) |
| 六、排列、组合、二项式定理.....     | (40) |
| <b>第二章 立体几何</b> .....  | (45) |
| 一、直线和平面.....           | (45) |
| 二、多面体和旋转体.....         | (58) |
| <b>第三章 解析几何</b> .....  | (71) |
| 一、直线和二次曲线.....         | (71) |
| 二、极坐标和参数方程.....        | (89) |
| <b>第四章 综合题</b> .....   | (95) |

## 下篇 解答

|                     |       |
|---------------------|-------|
| <b>第一章 代数</b> ..... | (107) |
|---------------------|-------|

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 一、幂函数、指数函数、对数函数·····   | (107) |
| 二、三角函数、反三角函数、三角方程····· | (115) |
| 三、不等式·····             | (127) |
| 四、数列、极限、数学归纳法·····     | (137) |
| 五、复数·····              | (174) |
| 六、排列、组合、二项式定理·····     | (198) |
| <b>第二章 立体几何</b> ·····  | (202) |
| 一、直线和平面·····           | (202) |
| 二、多面体和旋转体·····         | (220) |
| <b>第三章 解析几何</b> ·····  | (236) |
| 一、直线和二次曲线·····         | (236) |
| 二、极坐标和参数方程·····        | (270) |
| <b>第四章 综合题</b> ·····   | (289) |

上 篇

试 题



## 第一章 代 数

### 一、幂函数、指数函数、对数函数

#### (一) 单项选择题

1.  $0.3^2$ ,  $\log_2 0.3$ ,  $2^{0.3}$  这三个数之间的大小顺序是 (83年全国高考数学试题, 以下简称。)

(A)  $0.3^2 < 2^{0.3} < \log_2 0.3$ ; (B)  $0.3^2 < \log_2 0.3 < 2^{0.3}$ ;

(C)  $\log_2 0.3 < 0.3^2 < 2^{0.3}$ ; (D)  $\log_2 0.3 < 2^{0.3} < 0.3^2$

2. 数集  $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$  与数集  $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$  之间的关系是 (84年全)

(A)  $X \subset Y$ ; (B)  $X \supset Y$ ;

(C)  $X = Y$ ; (D)  $X \neq Y$ ;

3. 在下面给出的函数中, 哪一个函数既是区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上的增函数, 又是以  $\pi$  为周期的偶函数 (85年全)

(A)  $y = x^2 (x \in \mathbb{R})$ ; (B)  $y = |\sin x| (x \in \mathbb{R})$ ;

(C)  $y = \cos 2x (x \in \mathbb{R})$ ; (D)  $y = e^{i \cdot 2x} (x \in \mathbb{R})$

4. 函数  $y = 0.2^{-x} + 1$  的反函数是 (86年全)

(A)  $y = \log_5 x + 1$ ; (B)  $y = \log_5 5 + 1$ ;

(C)  $y = \log_5 (x-1)$ ; (D)  $y = \log_5 x - 1$ .

5. 已知全集  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{3,$

4, 5},  $B = \{1, 3, 6\}$ , 那么集合  $\{2, 7, 8\}$  是  
(86年全)

(A)  $A \cup B$ ; (B)  $A \cap B$ ;

(C)  $\bar{A} \cap \bar{B}$ ; (D)  $\bar{A} \cup \bar{B}$ .

6. 设  $S, T$  是两个非空集合, 且  $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$ , 记  $X = S \cap T$ ,  
那么  $S \cup X$  是 (87年全)

(A)  $S$ ; (B)  $T$ ; (C)  $\emptyset$ ; (D)  $X$ .

7. 设  $\log_3 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 m = \log_4 16$ , 那么  $m$  等于 (87  
年全)

(A)  $\frac{9}{2}$ ; (B) 9; (C) 18; (D) 27

8. 在区间  $(-\infty, 0)$  上为增函数的是 (87年全)

(A)  $y = -\log_2 \frac{1}{-x}$ ; (B)  $y = -(x+1)^2$ ;

(C)  $y = \frac{x}{1-x}$ ; (D)  $y = 1 + x^2$ .

9. 函数  $y = \frac{x-2}{2x-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq \frac{1}{2}$ ) 的反函数是 (88年全)

(A)  $y = \frac{x-2}{2x-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq \frac{1}{2}$ );

(B)  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq 2$ );

(C)  $y = \frac{x+2}{2x-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq \frac{1}{2}$ );

(D)  $y = \frac{2x-1}{x+2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ , 且  $x \neq -2$ ).

10. 与函数  $y = x$  有相同图象的一个函数是 (89年全)

(A)  $y = \sqrt{x^2}$ ; (B)  $y = \frac{x^2}{x}$ ;

(C)  $y = a^{1+\sin x}$ , 其中  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;

(D)  $y = \log_a a^x$ , 其中  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

11. 已知  $f(x) = 8 + 2x - x^2$ , 如果  $g(x) = f(2 - x^2)$ , 那么  $g(x)$  (89年全)

(A) 在  $(-1, 0)$  上是减函数;

(B) 在  $(0, 1)$  上是减函数;

(C) 在  $(-2, 0)$  上是增函数;

(D) 在  $(0, 2)$  上是增函数;

12. 方程  $2^{1+\sin x} = \frac{1}{4}$  的解是 (90年全)

(A)  $x = \frac{1}{9}$ ; (B)  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

(C)  $x = \sqrt{3}$ ; (D)  $x = 9$ .

13. 设全集  $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ , 集合  $M = \{(x, y) |$

$\frac{y-3}{x-2} = 1\}$ ,  $N = \{(x, y) | y = x+1\}$ . 那么  $\overline{M \cap N}$

等于 (90年全)

(A)  $\emptyset$ ; (B)  $\{(2, 3)\}$ ;

(C)  $\{(x, y) | y = x+1\}$ ; (D)  $(2, 3)$ .

14. 已知函数  $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$  的定义域为  $F$ ,

函数  $g(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$  的定义域为  $G$ , 那么 (85年上)

(A)  $F \cap G = \emptyset$ ; (B)  $F = G$ ;

(C)  $F \subset G$ ; (D)  $G \subset F$ .

15. 函数  $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) (86年上)

- (A) 是奇函数，不是偶函数；  
 (B) 是偶函数，不是奇函数；  
 (C) 既不是奇函数，又不是偶函数；  
 (D) 既是奇函数，又是偶函数。

16.  $a, b$  满足  $0 < a < b < 1$ ，下列不等式中正确的是 (86年上)

- (A)  $a^a < b^b$ ; (B)  $b^a < b^b$ ;  
 (C)  $a^a < b^a$ ; (D)  $b^b < a^b$ .

17. 设函数  $y = \log_3 x + 3 (x \geq 1)$ ，则  $y$  的值域是 (87年上)

- (A)  $\{y | y \geq 2\}$ ; (B)  $\{y | y > 3\}$ ;  
 (C)  $\{y | y \geq 3\}$ ; (D)  $\mathbb{R}$ .

18.  $y = \frac{1+a^{2x}}{1-a^{2x}} (a > 0, a \neq 1)$  是 (88年上)

- (A) 奇函数; (B) 偶函数;  
 (C) 既奇，又偶; (D) 非奇非偶函数。

19. 下面四个函数中为奇函数的是 (89年上)

- (A)  $y = x^2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ; (B)  $y = x^2 \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ;  
 (C)  $y = \cos(\operatorname{arccot} x)$ ; (D)  $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$ .

20. 已知  $1 < x < d$ ，令  $a = (\log_d x)^2$ ， $b = \log_d(x^2)$ ， $c = \log_d(\log_d x)$ ，则 (90年上)

- (A)  $a < b < c$ ; (B)  $a < c < b$ ;  
 (C)  $c < b < a$ ; (D)  $c < a < b$ ;

21.  $y = x^2 (x \leq 0)$  的反函数是 (85年广)

- (A)  $y = \sqrt{x}$ ; (B)  $y = \pm \sqrt{x}$  (C)  $y = -\sqrt{x}$ ;  
 (D)  $y = \sqrt{-x}$ ; (E)  $y = -\sqrt{-x}$ .

22. 如果  $y = \log_{a+1} x$  在  $(0, +\infty)$  内是减函数, 则  $a$  的取值范围是 (85年广)

- (A)  $|a| > 1$ ; (B)  $|a| < \sqrt{2}$ ; (C)  $a > \sqrt{2}$ ;  
(D)  $a < -\sqrt{2}$ ; (E)  $1 < |a| < \sqrt{2}$ 。

23. 函数  $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$  的单调递减区间是 (86年广)

- (A)  $(-\infty, -3]$ ; (B)  $[-3, +\infty)$ ;  
(C)  $(-\infty, -1]$ ; (D)  $[-1, +\infty)$ ;  
(E)  $[-3, -1]$ 。

24. 函数  $y = \log_{\cos 1} \cos x$  的值域是 (86年广)

- (A)  $[-1, 1]$ ; (B)  $(-\infty, +\infty)$ ;  
(C)  $(-\infty, 0]$ ; (D)  $[0, +\infty)$ ;  
(E)  $[\cos 1, (\cos 1)^{-1}]$ 。

25. 已知函数  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ , 那么在  $(-\infty, +\infty)$  上 (87年广)

- (A)  $f(x)$  和  $g(x)$  都是增函数;  
(B)  $f(x)$  和  $g(x)$  都是减函数;  
(C)  $f(x)$  是减函数, 而  $g(x)$  是增函数;  
(D)  $f(x)$  是增函数, 而  $g(x)$  是减函数。

26. 对数方程  $2 \log_3 x = 1 - \log_3 3$  的解是 (88年广)

- (A)  $\sqrt{3}$ ; (B)  $\sqrt{2}$  和  $-\sqrt{2}$ ; (C)  $\sqrt{2}$ ;  
(D)  $\sqrt{8}$  和  $\sqrt{2}$ 。

27. 如果用  $C$ ,  $R$  和  $I$  分别表示复数集, 实数集和纯虚数集, 其中  $C$  为全集, 那么有 (88年广)

- (A)  $C = R \cup I$ ; (B)  $R \cap I = \{0\}$ ;  
(C)  $R \cap I = \emptyset$  (D)  $\bar{R} = C \cap I$ 。

28. 下列函数中, 在区间  $(0, 1)$  上是增函数的只有  
(88年广)

(A)  $y = -\sqrt{x}$ ;      (B)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ;

(C)  $y = -x^2 + 2x + 1$ ;      (D)  $y = \frac{1}{x^2}$ .

29. 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且当  $x \in (0, +\infty)$  时,  
 $f(x) = x(1 + 3\sqrt{x})$ , 那么当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  
 $f(x) =$  (88年广)

(A)  $x(1 - 3\sqrt{x})$ ;      (B)  $-x(1 - 3\sqrt{x})$ ;

(C)  $x(1 + 3\sqrt{x})$ ;      (D)  $-x(1 + 3\sqrt{x})$ ;

30. 已知  $y = f(x)$  的图象如下, 那么  $f(x) =$

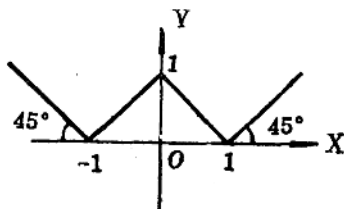


图1-1

(88年广)

(A)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ;      (B)  $\sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ ;

(C)  $|x^2 - 1|$ ;      (D)  $x^2 - 2|x| + 1$ .

31. 设  $P = \{x | x = \sin \frac{m\pi}{6}, m \in \mathbb{N}\}$ ,  $Q = \{x | x = \sin \frac{n\pi}{12},$

$n \in \mathbb{N}\}$  那么 (88年广)

(A)  $P \subset Q$ ;      (B)  $P \supset Q$ ;

(C)  $P=Q$ ; (D)  $P \cap Q = \emptyset$ ;

32. 函数  $y = \sqrt{x-2} + 1$  ( $x \geq 2$ ) 的反函数是  $y =$  (88年广)

(A)  $2 - (x-1)^2$  ( $x \geq 2$ );

(B)  $2 + (x-1)^2$  ( $x \geq 2$ );

(C)  $2 - (x-1)^2$  ( $x \geq 1$ );

(D)  $2 + (x-1)^2$  ( $x \geq 1$ );

33. 如果奇函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 那么  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上 (88年广)

(A) 必是减函数; (B) 必是增函数;

(C) 既可能是减函数也可能是增函数;

(D) 不一定具有单调性。

34. 下列函数中, 在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数的只有 (88年广)

(A)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; (B)  $y = -(\frac{1}{3})^x$ ;

(C)  $y = 3^x + (\frac{1}{3})^x$ ; (D)  $y = -3^x$ 。

35. 设  $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3}$  ( $x \in \mathbb{R}$  且  $x \neq -\frac{3}{4}$ ) 则  $f^{-1}(2) =$

(87年广)

(A)  $-\frac{5}{6}$ ; (B)  $\frac{5}{11}$ ; (C)  $\frac{2}{5}$ ; (D)  $-\frac{2}{5}$

## (二) 填空题

1. 函数  $\log_{0.5}(x^2 + 4x + 4)$  在 \_\_\_\_\_ 区间上是增函数  
(84年全)

2. 函数  $y = -x^2 + 4x - 2$  在区间  $[0, 3]$  上的最大值是 \_\_\_\_\_,

最小值是\_\_\_\_。(85年全)

3. 函数  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 则函数  $f(x^2)$  的定义域是\_\_\_\_。(85年全)

4. 方程  $\sqrt[25]{x^2 + x - 0.5} = 4\sqrt[5]{5}$  的解是\_\_\_\_。  
(86年全)

5. 函数  $y = \log_2(1 + 2x - 3x^2)$  的定义域是\_\_\_\_。  
(87年全)

6. 函数  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  的反函数的定义域是\_\_\_\_。(89年全)

7. 函数  $y = 3\sqrt{x} - 1$  的反函数是\_\_\_\_。(85年上)

8. 函数  $y = \log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)$  的定义域是\_\_\_\_。(86年上)

9. 函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  是偶函数的充要条件是\_\_\_\_。  
(87年上)

10. 设  $2^a = 5^b = 10$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ \_\_\_\_。(87年上)

11.  $y = \sqrt{x-1}$  的反函数是\_\_\_\_。(88年上)

12. 函数  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  的递增区间是\_\_\_\_。(89年上)

13. 方程  $\log_2(x-3) = \log_4(5-x)$  的解是\_\_\_\_。  
(89年上)

14. 函数  $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$  的定义域是\_\_\_\_。(90年上)

15. 如果  $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1-x^2}$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_。(85年广)

16. 设函数  $y = \lg(x^2 - x - 2)$  的定义域为  $A$ , 函数

$y = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$  的定义域为  $B$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_。(86年广)

17. 函数  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的值域是 \_\_\_\_。(87年广)

18.  $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 27$  的值是 \_\_\_\_。(87年广)

### (三) 解答题

1. 设1980年底我国人口以10亿计算。

(1) 如果我国人口每年比上年平均递增2%，那么到2000年底将达到多少？

(2) 要使2000年底我国人口不超过12亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

下列对数值可供选用

$$\lg 1.0087 = 0.00377, \quad \lg 1.0092 = 0.00396.$$

$$\lg 1.0096 = 0.00417, \quad \lg 1.0200 = 0.00860.$$

$$\lg 1.2000 = 0.07918, \quad \lg 1.3098 = 0.11720.$$

$$\lg 1.4568 = 0.16340, \quad \lg 1.4859 = 0.17200.$$

$$\lg 1.5157 = 0.18060, \quad (81年全)$$

2. 设  $c, d, x$  为实数，讨论方程  $\log_{(cx + \frac{d}{x})} x = -1$  在什么

情形下有解。有解时求出它的解。(84年全)

3. 解方程  $\log_4(3-x) + \log_{0.25}(3+x) = \log_4(1-x) + \log_{0.25}(2x+1)$  (85年全)

4. 设  $a > 0, a \neq 1, t > 0$ , 比较  $\frac{1}{2} \log_2 t$  与  $\log_2 \frac{t+1}{2}$  的大小并证明你的结论。(88年全)

5. 设有对数方程  $\lg(ax) = 2 \lg(x-1)$  :