高等学校教学参考书

现代数学引论

《下 册》

P·罗曼 著

郭毓驹
谢力之 译
胡美琛

汉中师范学院

高等学校教学参考书

现代数学引论

《下　册》

P·罗曼　著

郭毓驹　谢力之　胡美琛　译

汉中师范学院

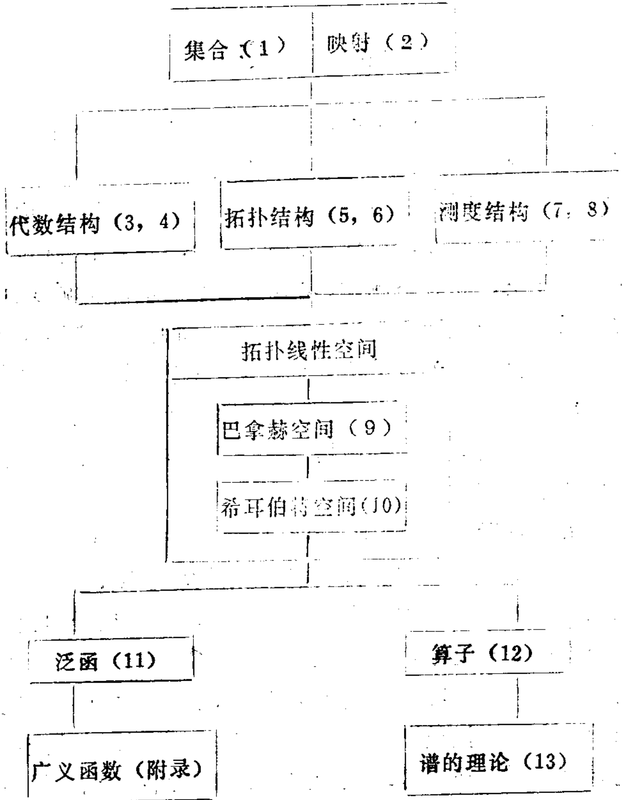
译　　序

译文分上、下两册出版。全书主要内容是数学中的三个基本结构与泛函分析。三个基本结构是代数结构（包括群、环、域、线性空间、线性代数、李代数等），拓扑结构（包括拓扑空间、连通性、可分性、紧性等），测度结构（包括测度的一般理论、勒贝格测度、勒贝格—斯蒂尔吉斯测度、可测函数、积分的一般概念、勒贝格积分、勒贝格—斯蒂尔吉斯积分等）；泛函分析包括拓扑线性空间（巴拿赫空间、希尔伯特空间）以及拓扑线性空间的映射（线性泛函、线性算子和谱的理论），上册讲三种结构（1～8章）下册讲泛函分析（9～13章）和附录。

原书于1975年由美国 Pergamon 出版公司出版，著者P·Roman（罗曼）是当代著名理论物理学家，名列《世界名人录》，曾写过三本举世公认的名著：基本粒子理论，高等量子论和量子场论。P·罗曼的数学造诣甚高，以一个理论物理学家的身分写一本现代数学的入门书，书中不涉及物理知识，全部讲授数学，立论严密完整，书写深入浅出，不论是概念的引进还是基本理论的展开都清晰易懂，平易近人。该书的一大特点是运用大量启发性的（常常是有趣的）例子，将现代数学的基本概念和方法展现在读者的面前，通过这些例子能够使读者对内容的理解更加全面和深入。

全书的纲要如下（见反面的表，括号中的数字表示相应的内容所在的章数）：

在现代物理、化学、生物学和现代工程技术的研究和教



学中，现代数学已经是不可缺少的工具。对一个需要学习现代数学的读者来说，本书是一本较好的入门，它虽然不象一些专门的现代数学的书籍一如抽象代数、拓扑学、测度论、实变函数和泛函分析那样全面和深入，但它却以一种深入浅出的方式把这些内容中的最基本的概念、理论和方法告诉给读者，将读者引入现代数学的宫殿中去。本书可以作为综合

大学和师范院校数学系、物理系、化学系、生物系以及工科大学有关现代工程技术的专业的教学参考书。

译文承蒙复旦大学数学系付教授欧阳光中、朱学炎两同志对部份章节进行了审查，并提出了宝贵的意见；另外汉中师院函数论组熊晓明老师也参予了译文铅印的部分工作，在此一并致以谢意。

译文是由复旦大学郭毓驹(复旦大学数学系副教授)、胡美琛（复旦大学计算机科学系讲师）、复旦校友谢力之（汉中师院数学系讲师）合译。由于译者水平所限，翻译中的错误必然不少，恳切希望同志们给予批评指教。

译者　一九八二年七月

下册目录

第三部分：泛函分析

三A：线性拓扑空间

三B：　线性拓扑空间的映射

附：上册目录

上册目录

第一部分：数学中的基础材料

第二部分：数学中的基本结构

二A：代数结构

二B：拓扑结构

第三部分 泛函分析

三A：线性拓扑空间

第九章 巴拿赫空间

在本书的第二部分（第3—8章）中，我们已经概述了数学的基本结构。原则上，全部数学只不过是这些基本结构的有目的的和系统的组合。实际上，我们已经学习了“如何进行代数学”（代数结构），如何表达几何问题处理收敛性与连续性问题（拓扑系统），又我们也已看到如何处理几何学与微积分学的“其余部分”（测度论与积分）。值得记住所有这些概念是作为实数性质推广而产生的。

概括起来，每一已给系统可以由指定其代数的、拓扑的与测度论的性质而特征出来。例如，实数系统可以被描述如下*：

（*a*）代数方面：一阶的交换实除法代数。

（*b*）拓扑方面：局部紧、单连通、局部连通、可分的完备距离空间（实际上是一维欧氏空间）。

（*c*）测度论方面：完全σ有限的完备测度空间。

要知道有关实数集上函数的“一维”代数学、几何学和微积分学的每一件事情直接从上面这些基本结构得到。

* 我们假定通常的、传统上的结构被加于基本集上。

留心的读者将会注意到：实直线上的三类结构并不是相互完全独立的。事实上，它们之间存在着有意义的相互关系，又若人们注意这些关系，则就能得出一大堆知识，这些知识不可能由集中注意力于这一类或另一类基本结构而发现。

这一简单的考察就暗示了什么是近代数学家实际上从事的工作。近代数学家努力仔细地并从各种特定的观点来研究基本结构的有意义的交织。基本数学结构的组合导致无穷无尽的一串越来越激动人心的系统，并导致实际上无限丰富的发现。

存在有几种可能用来组合不同结构的基本方法。在本书中，我们将集中注意力将一个拓扑结构加到一个已给代数结构上的过程*。这样，我们就得到了所谓的“拓扑代数”，但是更通常地，称之为“泛函分析”。应当提及，从历史上说，术语“泛函分析”有时被用于稍为不同的意义上，与其表示数学的一个分支，不如表示一种观点，一种具有巨大统一力量的方法。从这一角度来说，泛函分析主要是以研究定义域与上定义域两者都具有一种或几种有趣的结构（代数的、拓扑的与测度论的）的映照为特征。将这一种观点记在心中，可以说我们已接触到这种性质的问题了。例如，收缩映射定理就是一个很好的说明。然而，在后面的内容中，我们将以上面给出的较精确的意义来解释术语“泛函分析”。

可以认为泛函分析应当是将一个拓扑结构加到一个已给

---

* 测度论概念也将起重要作用，主要地通过距离构造拓扑，反过来，距离是藉积分之助而导出的。在仔细研究几个具体结构中，积分理论也将作为一种必不可少的工具而出现的。

的代数结构上作出发点。这样一来，就引向拓扑群的概念。但是这又表明这些系统是十分复杂，因而还是对一个线性空间赋以一种拓扑结构作为出发点更好一些。这就导致称之为线性拓扑空间的系统。本章与下一章中，我们就是研究这种系统的结构。按照我们既定的方针，将以最一般形式的线性拓扑空间出发，然后，加以越来越特殊的要求，进而对特定类型的研究。

9.1 线性拓扑空间的一般概念

我们的目的要将一个线性空间与一个被加的拓扑结构合起来。为了保证合成的结构不是完全平凡的，我们将不使用一种完全任意的拓扑，而宁愿使用与已给线性结构相容的，且与其密切相关的一种拓扑。以这一精神，从下面的基本定义出发。

定义9.1（1）设L是一个线性空间（以x，y，…表示元素）。设K是与L相连系的纯量域*（以α，β，…表示元素）。假定（i）向量和$x+y$是$L\times L$上一个连续函数。

（ii）纯量积αx是$K\times L$上一个连续函数。

则我们说L是一个**线性拓扑空间**。

为了弄清楚这个定义，需要几点说明。首先，注意到线性拓扑空间是由基本集X，X上线性空间结构L和X上的拓扑τ所组成的一个有序三元组(X,L,τ)。然而，为了与通常的习惯相一致且不致引起混淆，删掉明显表示基本集X，而使用同一个记号L既表示集又表示它的代数结构。其次，我们

---

* 如在纯代数中所做的一样，我们限于K或是实数域或是复数域的情况。相应地，我们说到实线性拓扑空间或复线性拓扑空间。

记住向量和是由$(x, y) \to x+y$给出的映射$L \times L \to L$。现在，我们假定L（或更确切些，它的基本集X）具有拓扑τ，于是我们不言而喻地规定$L \times L$（更确切些，$X \times X$）被赋以乘积拓扑$\tau \times \tau$（参看5.2节）。因此，现在讲到向量和映射$L \times L \to L$的连续性就有意义了。类似地，记住纯量积是由$(\alpha, x) \to \alpha x$给出的映射$K \times L \to L$。我们暗暗地假定纯量所成的集合（如上面脚注中说明，我们将它取作实数集或复数集）被赋以它的通常（距离）拓扑τ_K，又我们也考虑$K \times L$（更确切地，$K \times X$）是赋以乘积拓扑$\tau_K \times \tau$。这样一来，讲到纯量积映射$K \times L \to L$的连续性就有意义了。于是，线性拓扑空间的定义要求$x+y$与αx关于各自的定义域和定义域上的相关拓扑是连续的。

应当明白，对已给一个线性空间L，可以找到几个（甚至无限多个）L上拓扑使和与纯量积是连续的。每一种这样的拓扑引出不同的线性拓扑空间。

稍为考虑一下就知道：关于$x+y$和αx的连续性要求可以详细说明如下：

(i) 对任一对已给的x、$y \in L$和$x+y$在L中的任一个已给的邻域U，存在x的一个邻域V和y的一个邻域W，使得对任一个已给的$v \in V$和$w \in W$，我们有$v+w \in U$。

(ii) 对任一个已给的$x \in L$和任一个已给的$\alpha \in K$，和αx在L中任一个已给的邻域U，存在x在L中一个邻域V和α在K中一个邻域*S，使得对任何$v \in V$与任何$\beta \in S$，我们有$\beta v \in U$。

---

* 因为我们的K是实数集或复数集，邻域S实际上是含有α的一个开球，即含有α的一个区间或一个圆。

为了说明这些概念，我们考虑两个非常简单的例子。

例α　设L是一个任意的线性空间，并给它以非离散拓扑$\tau=\{\phi, L\}$。任一个向量$x+y$的唯一邻域是L本身。类似地，x与y有唯一的邻域$V=L$与$W=L$。因此，对任一对v，w，和$v+w$必然在$U=L$中。类似地，αx具有的唯一邻域是$V=L$，所以对任何β（不论是否在α的邻域S中），我们有$\beta x\in U=L$。因此，我们得到一个线性拓扑空间。

例β　设L是一个任意的线性空间，又设τ为离散拓扑（一切集合为开集）。设$x\neq 0$，又取$\alpha=0$，所以$\alpha x=0$。选取单点集$\{0\}$为αx的邻域U。注意到任一个含有数$\alpha=0$的开球S一定含有一个非零元素β。现在，不论所考虑的x的邻域V是什么，它至少含有一个非零向量（即x本身），因此$\beta x\neq 0$，从而$\beta x\notin U$。因此，对向量积连续性准则被破坏。因之，我们得不到线性拓扑空间。就我们的线性拓扑空间的定义而言，所指定的拓扑与线性空间结构不相容。

最最重要的线性拓扑空间是拓扑由距离d导出的线性拓扑空间。因此，我们可以将线性距离空间定义为一种三元组（X，L，d），其中由d（通过开球）导出的拓扑与定义9.1（1）意义下的线性空间结构是相容的。对线性距离空间而言，连续性要求可以表示为下面较为简单的方式：

(i) 若$x_n\to x$且$y_n\to y$，则一定有$x_n+y_n\to x+y$。

(ii) 若$x_n\to x$且$\alpha_n\to\alpha$，则一定有$\alpha_n x_n\to\alpha x$。

不用多说，这里$x_n\to x$表示$d(x_n, x)\to 0$，即只要$n\geqslant N$，就有$d(x_n, x)<\varepsilon$等等，又$\alpha_n\to\alpha$简单地表示$|\alpha_n-\alpha|\to 0$，即只要$n\geqslant M$，就有$|\alpha_n-\alpha|<\eta$。此外，在准则（ii）中，（x_n）与（α_n）两者表示独立地收敛，但两种情况是特

别重要的。它们就是：

(a) α 是固定的，$x_n \to x$；则$\alpha x_n \to \alpha x$。

(b) x 是固定的，$\alpha_n \to \alpha$；则$\alpha_n x \to \alpha x$。

在绝大多数情况中，一个线性距离空间的距离具有一种特殊的性质*：它是一种不变的距离。我们说一个距离是不变的，当且仅当对L中的任何三个向量x，y，a，有

$$d(x+a,\ y+a)=d(x,\ y).$$

（即"不变性"意味着在任意平移下距离的不变性。）对于具有不变距离的距离空间来说，检验它是一个线性拓扑空间的连续性要求就大大简化了，因为我们有下面定理。

定理9.1（1） 设d是线性空间L上一个不变距离。假定 (a) $x_n \to 0$与$y_n \to 0$含有$x_n+y_n \to 0$，

(b) $x_n \to 0$与$\alpha_n \to \alpha$含有$\alpha_n x_n \to 0$。

则L是一个线性拓扑空间。

我们将经常利用线性距离空间的这一准则，它将连续性的检验简化为零向量的检验。证明留给读者，参看问题9.1—4。现在我们给出线性距离空间的几个例子。

例1 赋以通常线性空间结构和通常距离的实直线是一个线性距离空间。实际上，$d(x,\ y)=|x-y|$是一个不变距离，又$x_n \to 0$，$y_n \to 0$ 含有 $|x_n+y_n-0|\equiv|x_n+y_n|\leqslant|x_n|+|y_n|\to 0$；类似地，$x_n \to 0$与$\alpha_n \to \alpha$ 含有 $|\alpha_n x_n|=|\alpha_n||x_n|\to 0$。同样，容易看到（问题9.1—5）赋以通常毕达哥拉斯距离的实n维向量空间R^n（即n维欧氏空间E^n）是一个线性距离空间。对距离的各种不同的推广和对无限维的类似空间，同样是正确的。然而，这些空间具有特殊的性质

*许多作者对这种特殊情况保留术语"线性距离空间"。

（内积或范数），在后面几节中将加以考虑。

例8 一个较复杂的例子以下面途径出现。设 (X,B,μ) 是一个测度空间，又设E为一个具有有限测度的子集。考虑E上实（复）值函数全体所成的集类$\{\cdots f\cdots\}$.显然地，关于点态和与纯量积，我们得到由函数组成的一个线性空间L。在这空间中，定义

$$d(f, g)=\int_E \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}d\mu$$

即使不假定f与g为可积（甚至不是有界），而被积函数

$$\psi=\frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

总是可积的。（注意到ψ是可测的*，且为有界，$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$，所以由定理8.3（9），$\psi$是可积的。）因此，$d(f, g)$存在，且对任何$f$，$g\in L$为有限；此外，它是非负的。对称性$d(g, f)$是平凡的。为了证明三角形不等式成立，我们注意到：对任何两个实数α与β,

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$

所以对任何三个函数f，g，h,

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\leqslant\frac{|f-h|}{1+|f-h|}+\frac{|h-g|}{1+|h-g|}.$$

然后利用关于积分的定理8.3（4），我们看到

$$d(f, g)\leqslant d(f, h)+d(h, g).$$

但我们仍不能断言 d 是L上一个距离。我们应当有$d(f,g)$

---

*注意到$|f-g|$是可测的，$1+|f-g|$是可测的，且为正的，因此，$(1+|f-g|)^{-1}$是可测的。

$=0$ 当且仅当$f=g$；但这是不可能的，因为即使$f\neq g$而只有$f \doteq g$，仍有$d(f, g)=0$。（这是因为当我们在零集上改变函数时，积分值不变）。为了防止发生这一困难，我们首先注意到$f \doteq g$是具有公共定义域的函数所成的集合上一个等价关系。因此，我们可以定义E上函数的等价类

$$[f]=\{h \mid h \doteq f\},$$

并构造商集L/Q。定义*$[f]+[g]=[f+g]$和$\alpha[f]=[\alpha f]$，就容易看到L/Q是一个线性空间。然后，在L/Q上定义距离

$$\hat{d}([f], [g])=d(f, g)$$
$$\equiv \int_E \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} d\mu,$$

其中右边的f与g各自为集类［f］与［g］的任意代表**。现在，这是L/Q上一个真正的距离，因为显然它具有一切已建立的性质，且若［f］$\neq$［g］，则因被积函数是正函数是正函数，故右边不为0（这里暗地里假定$\mu(E)\neq 0$）。因此，能够继续讨论经间L/Q，它既是一个线性空间，又是一个距离空间。然而，还有一种更方便观点，一直用这一观点来处理空间L。这种处理方法是由（在我们心中）将只在零集上不同的L中的一切函数看作同一。于是，若$f \doteq g$就认为这两个对象是L中同一个元素，又原来的距离d（f,g）变成L上一个可接受的距离。为了方便起见，我们采用这一观点。下面，将证明（L，d）是一个线性距离空间，即满足和与纯量积所要求的连续性。为了证明这点，需要下面的引

*能够检验这些定义是与代表元素的选取无关。

**显然，积分的值不依赖于代表元素的特别选取。