内 容 提 要

本书为下册一分册，主要内容讲概率论基础与数理统计初步．供具有高中毕业程度的二年制财经中专作试用教材．

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数 学

下册一分册

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

浙江洛舍印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 90,000

1982年3月第1版 1982年8月第1次印刷

印数 00,001—90,000

书号 13012·0737 定价 0.34 元

前　言

《数学》下册一分册《概率论与数理统计初步》是在东北、华北协作区编写的《数学》教材基础上，根据一九八一年十月教育部制订的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的.

《概率论与数理统计初步》共五章，关于内容安排及讲授安排作以下几点说明，仅供参考.

(一) 第一章概率论基本概念的内容，中学教材基本都有，本教材略有提高、加深. 如果学生基础较好，则可抓住主要内容进行系统复习. 第二章起是全新内容，应作重点讲授.

(二) 第二章随机变量最后一节，给出了"二元随机变量及其分布"(仅就离散型)，目的是给出随机变量相互独立等概念，为某些专业学习数理统计提供必要的准备知识. 打上"※"号，说明有些专业可以不讲. 未配习题.

(三) 第三章随机变量的数值特征，最后给出了矩的概念，未配习题. 目的是为数理统计讲矩法估计准备知识，在课时紧的情况下可仅作简单介绍.

(四) "回归分析"是经济工作者经常使用的数学工具，由于课时所限，暂不能作为必讲内容，仅在本书最后作简单介绍，供选学之用 .

本册教材由沈阳市财经学校主编，辽宁大学数学系郭第渐副教授，概率教研室主任刘良和担任主审. 参加编写的有沈阳市财经学校吴素文、赵长骥、周作光同志，参加初稿编写的还有

山西财贸学校郭太昌同志. 由于编者水平和经验有限，谬误之处一定很多，诚恳希望使用本教材的师生不吝赐教.

编　者

一九八二年二月

目　　录

第一章 概率论的基本概念

人们在观察自然界和社会现象时，会发现有些现象在一定条件下必然会发生，例如在标准大气压下，水温达到100°C,必有“水沸腾”现象发生；水温降到0°C以下，必有“结冰”现象发生，这些现象称为在相应条件下的必然事件．有些现象在一定条件下必然不发生，如气温在−20°C时“天下雨”现象；在水平的有摩擦的路面上，汽车无动力“开走了”现象都是不会发生的，这些现象称为在相应条件下的不可能事件．还有一些与上述现象在本质上不同的现象：在一定条件下，这些现象可能发生，也可能不发生，这种现象称为随机现象．例如，远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机的．又如，在抽查某工厂生产的10件产品中有几件次品是随机的．这种现象在一次抽查中结果呈现不确定性，但在大量重复抽查中，又呈现出某种规律性，这种规律性称为统计规律性，概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

§1 随机试验 随机事件

研究随机现象离不开试验或观察，如果某试验或观察满足以下三个条件：

（1）可以在相同条件下重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有可能结果；

(3) 一次试验前不能明确哪一个结果会出现.

则称为随机试验,简称为试验.

为方便起见，以下有时用字母E表示随机试验. 我们就是通过研究随机试验研究随机现象的.

例 1 掷一枚五分的硬币，观察正面（不妨设花朝上为正面），反面出现的情况. 该试验满足(1)可以在相同条件下重复投掷;(2)每次试验的可能结果有两个，并且事先能明确试验的所有可能结果是正面或反面出现;(3)投掷前不能明确哪一面出现,因此该试验是随机试验.

例 2 某人向离地 100 米处的靶上射击，观察击中的环数. 此事满足上述三个条件:(1)可以在相同条件下重复射击;(2)每次射击可能结果是 0 环，1 环，2 环，…，10 环；(3)射击前不能明确知道击中多少环,因此该试验是随机试验.

在随机试验E中,每一个可能出现的最简单的结果w,称为E的基本事件.

例 2 中,一次射击可能击中的环数有十一个,它们中的每一个都是基本事件.

随机试验E的全体基本事件组成的集合，称为E的基本事件空间,记为$\Omega=\{w\}$.

若E_1表示例 1 所述试验，w_1, w_2分别表示出现正面，反面事件,则E_1的基本事件空间$\Omega=\{w_1, w_2\}$.

若E_2表示例 2 所述试验,用 0, 1, 2, …, 10 表示击中相应环数的各事件,则E_2的基本事件空间$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

例 3 E_3表示掷一颗骰子,观察出现的点数,试验结果可能出现 1 点，2 点，…，6 点,如果用这些数字表示出现相应点数的各事件(以下类似),则$\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$.

例 4 E_4 表示记录电话交换台在七点到八点的一小时内所接到呼唤的次数，可能是 0, 1, 2, …, n 次，则 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$. 这里 n 是某一有限整数.

例 5 E_5 表示观察北京十月份的平均气温 T，这里假设平均气温不会小于 T_0，不会大于 T_1，则基本事件空间为 $\Omega=\{T; T_0 \leqslant T \leqslant T_1\}$，简记为 $\Omega=\{T_0, T_1\}$.

例 6 E_6 表示向平面某块有色区域 Ω_0 随意投球，观察球落的位置，以 $w(a, b)$ 表示球落在横坐标为 a，纵坐标为 b 的一个试验结果，则基本事件空间重合于区域 Ω_0，即 $\Omega=\Omega_0$.

基本事件空间 Ω 中的子集，称为 E 的一个随机事件，简称事件，常用 $A, B, C, \cdots$ 表示.

例如，已知随机试验 E_3 的基本事件空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则

子集 $\{1, 3, 5\}$ 是一事件，记为 $A_1=\{1, 3, 5\}$；

子集 $\{2, 4, 6\}$ 是一事件，记为 $A_2=\{2, 4, 6\}$；

子集 $\{4, 5, 6\}$ 是一事件，记为 $A_3=\{4, 5, 6\}$；

子集 $\{1, 2\}$ 是一事件，记为 $A_4=\{1, 2\}$；

子集 $\{6\}$ 是一事件，记为 $A_5=\{6\}$.

通常只要 A 的一个基本事件发生，就说事件 A 发生. 对于上面的事件 A_2，如果试验的结果是 2 点，则说事件 A_2 发生；对于事件 A_4，如果试验的结果是 1 点，则说事件 A_4 发生. 为研究方便，将必然事件也视为随机事件，显然必然事件对应着基本事件空间 Ω；将不可能事件也视为随机事件，它对应于 Ω 中的空集 $\varnothing$，以后常用 Ω, $\varnothing$ 分别表示必然事件和不可能事件.

在某些问题的研究中，我们通常不只讨论一个事件，而是研究好些事件，而且这些事件间又存在一定联系，我们只有从事物

的联系中研究事物，才能掌握事物的本质.

例如，在一批含有正品、次品的产品中，任意抽取三个为试验 E，则下列都是试验 E 的事件，

A_1:（至少有一个次品）;

A_2:（恰好有一个次品）;

A_3:（至少有两个次品）;

A_4:（三个都是次品）;

A_5:（至多一个次品）;

A_6:（没有次品）;

A_7:（至少有一个正品）.

可以看出，上述事件间有一定联系，如 A_1 发生，则 A_6 不会发生；A_6 发生则 A_1 就不会发生；A_4 与 A_7 不会同时发生；如果 A_2 发生，则 A_1 也必然发生；当且仅当 A_2 与 A_3 至少有一个发生时，A_1 发生；当且仅当 A_1 和 A_5 都发生时，A_2 发生等等. 为把上述关系一般化，介绍事件间关系及其运算.

设试验 E 的基本事件空间为 Ω；A, B, C, A_k $(k=1, 2, \cdots)$ 为试验 E 的事件.

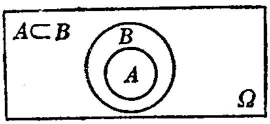

图 1-1

（一）包含关系（特款）

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，称事件 B 包含事件 A，或事件 A 是事件 B 的特款，记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$），如图 1-1.

如上例中，事件（至少有一个次品）A_1 就包含事件（恰好有一个次品）A_2，即 $A_2\subset A_1$.

如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B，即 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

（二）并

由两个事件A, B至少发生其一，也就是说A发生或者B发生，或者A与B同时发生，这样所构成的事件C称为A, B二事件的并(和)，记为$C=A\cup B$，如图 1-2.

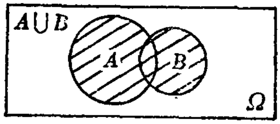

图 1-2

上例中，事件A_1就是A_2与A_3的并，即$A_1=A_2\cup A_3$.

一般地，事件A等于事件$A_k(k=1, 2, \cdots)$至少有一发生的事件，则事件A为$A_k(k=1, 2, \cdots)$的并，记为$A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

当k取有限个值$k=1, 2, \cdots, n$时得出事件的有限和，以$A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$表之.

(三) 交

由事件A与事件B同时发生所构成的事件称为事件A与事件B的交，记为$A\cap B$或$A\cdot B$或AB，如图 1-3.

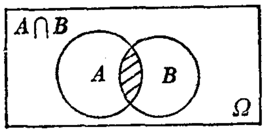

图 1-3

上例中，事件A_1与事件A_5的交便是A_2，即$A_2=A_1\cap A_5$.

类似地，可以规定一系列事件$A_k(k=1, 2, \cdots)$的交，记为$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(四) 互不相容

如果事件A发生，必然导致事件B不发生，即A与B不能同时发生$A\cap B=\varnothing$，称事件A与B是互不相容事件，记为$A\cdot B=\varnothing$，如图 1-4.

上例中，A_4与A_7便是互不相容事件.

$A \cap B = \phi$

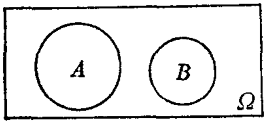

图 1-4

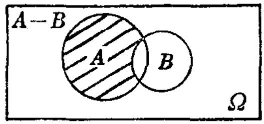

图 1-5

（五）差

事件A发生而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与B之差，记为$A-B$，如图1-5.

上例中，A_2便是A_1与A_3的差，即$A_2=A_1-A_3$.

若事件A与B为互不相容事件，则$A-B=A$.

（六）对立事件（逆事件）

事件$\Omega-A$称为事件A的对立事件或A的逆事件，记为$\bar{A}$，即$\bar{A}=\Omega-A$，如图1-6.

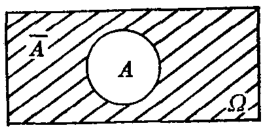

图 1-6

上例中，A_6便是A_1的对立事件，即$A_6=\bar{A}_1$.

显然，若事件A与B互为对立事件，则$A\cup B=\Omega$且$A\cap B=\varnothing$.

例7 抽查某工厂十件产品，记录不合格品出现的情况，显然，$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

设 A：（不合格品数小于3），即$A=\{0, 1, 2\}$;

B：（不合格品数小于5），即$B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

C：（不合格品数为4, 5, 6），即$C=\{4, 5, 6\}$;

D：（不合格品数大于4），即$D=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

则 $A\subset B$或$B\supset A$;

$B\cup C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$B\cap C=\{4\}$;

$B-C=\{0,1,2,3\}$.

由$A\cap C=\varnothing$，知A与C为互不相容事件.

由$B=\Omega-D$，知B与D互为对立事件，即$B=\bar{D}$.

由以上所说可以看出，事件间的关系及运算与集合之间的关系及运算是类似的，其运算法则也类似. 事件运算遵循以下法则：

$$\text{结合律：}\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);\end{cases}$$

$$\text{交换律：}\begin{cases}A\cup B=B\cup A,\\A\cap B=B\cap A;\end{cases}$$

$$\text{分配律：}\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\text{德·摩根律：}\\\text{(De Morgan)}\end{array}\begin{cases}\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\\\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.\end{cases}$$

这些法则都可以推广到有限个事件间的运算，例如

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_n)$$
$$=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n).$$

在进行事件运算时，其优先顺序如下：先逆，再交，后并或差.

§2 概　　率

某一试验重复多次时会发现某些事件出现的可能性大些，某些事件出现的可能性小些，或各种可能性相等，这种"事件出现的可能性的大小"是事件本身所固有的属性，我们用一个数$P\{A\}$来作为事件A出现的可能性大小的定量表示，则$P\{A\}$就

称为事件 A 的概率.

如何从数量上规定 $P\{A\}$ 呢? 先给出概率的统计定义, 为此引进频率概念.

设随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次, 则比值

$$f_n\{A\}=\frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

若 A 是必然事件, 则 $f_n\{A\}=1$; 若 A 是不可能事件, 则 $f_n\{A\}=0$, 显然, 对任何事件 A 有 $0\leqslant f_n\{A\}\leqslant 1$.

频率是能反映事件出现可能性大小的一个量, 当试验次数不多时, 频率有明显的随机性, 但是当试验次数增多时又逐渐呈现出稳定性, 即在某一常数附近作微小摆动.

观察掷硬币的试验结果, 设 A 表示出现正面的事件, 有下表

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n\{A\}$	n_A	$f_n\{A\}$	n_A	$f\{A\}$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表中可以看出, 当掷硬币次数较少时, 事件 A 出现的频率是不稳定的, 差异很大, 随着掷硬币次数的增多, 事件 A 出现的频率呈现出稳定性, 总是在 0.5 左右摆动, 而逐渐稳定于 0.5, 这

样0.5这个数反映出事件A出现的可能性的大小.

概率的统计定义：在n次重复试验下，当n充分大时，事件A在这n次试验中出现的频率将稳定在某个常数附近，我们称此常数为事件A出现的**概率**，记作$P\{A\}$.

上述掷硬币试验，出现正面事件A的概率可以认为$P(A)=0.5$.

事件的频率与概率是度量事件出现可能性大小的两个统计特征. 频率是个试验值，具有随机性，可能取多个不同值，因此它只能近似地反映事件出现的可能性大小；概率是个理论值，它由事件的本质所决定，只能取唯一值，能精确地反映事件出现的可能性的大小.

但在实际中，用频率近似代替概率是一个实用有效的办法. 我们经常碰到的合格率、废品率、出生率、升学率、死亡率、射击命中率等都是频率. 这样求得的概率一般称为经验概率.

§3 古典概型

按概率的统计定义求概率往往是行不通的或者是很繁杂的，而在一些简单、特殊的随机试验下，概率可以用较简单的办法求得，下面讲其中一种情况.

某试验如果满足以下二个条件：

(1) 试验所有结果的个数是有限的，设基本事件空间为$\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$；

(2) 各结果的出现是等可能的，即$w_k(k=1, 2, \cdots, n)$是互不相容的等可能事件，则称其为**古典概型**.

概率的古典概型定义：在古典概型下，设基本事件空间由n

个事件组成，事件 A 是由 m 个基本事件组成，则 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 出现的概率，即 $P\{A\}=\frac{m}{n}$.

可见在古典概型下，无须进行大量的重复试验，就可求得某事件出现的概率.

例 1 口试考场设有50张考签，编号为1,2,3, …, 50. 一个学生任抽一张应试，每张考签被抽到的可能性是相同的，$\Omega=\{1, 2, \cdots, 50\}$. 则“抽到 10 号考签”这一事件 A 的概率 $P\{A\}=\frac{1}{50}$;
“抽到前 5 号考签”这一事件 B 的概率 $P\{B\}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$.

例 2 一批 N 件产品中有 M 件次品，从这批产品中任取 n 件，试求这 n 件产品中恰有 m 件次品的概率.

解: 设事件 A 表示“n 件产品中恰有 m 件次品”

从 N 件产品中任取 n 件作为一基本事件，则基本事件空间由 C_N^n 个基本事件组成.

从 M 件次品中任取 m 件，再从 $N-M$ 中任取 $n-m$ 件组成 A 中的一个基本事件，则 A 由 $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ 个基本事件组成，故

$$P\{A\}=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-n}}{C_N^n}.$$

为了计算比较复杂的事件的概率以及进一步揭露概率的本质，就古典概型说明以下定理.

加法定理: 两个互不相容事件 A, B 的和的概率等于事件 A

和事件B概率的和，即$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}$.

证　设基本事件空间为$\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$,

A包含m_1个基本事件，$P\{A\}=\dfrac{m_1}{n}$,

B包含m_2个基本事件，$P\{B\}=\dfrac{m_2}{n}$,

于是，$A\cup B$包含(m_1+m_2)个基本事件，

$P\{A\cup B\}=\dfrac{m_1+m_2}{n}=\dfrac{m_1}{n}+\dfrac{m_2}{n}=P\{A\}+P\{B\}$.

推论1　若$A_1, A_2, \cdots, A_n$为两两互不相容事件，那么可得

$P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}+\cdots+P\{A_n\}$.

推论2　事件A的对立事件$\bar{A}$的概率为

$$P\{\bar{A}\}=1-P\{A\}.$$

推论3　若$A\subset B$，则$P\{B\}\leqslant P\{B\}$且

$$P\{B\}-P\{A\}=P\{B-A\}.$$

一般加法定理：设A, B为任意二事件，则

$$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$$

证　因为$A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$，A与$(B-A\cap B)$互不相容，所以$P\{A\cap B\}=P\{A\}+P\{B-A\cap B\}$,

因为　$A\cap B\subset B$，　所以$P\{B-A\cap B\}=P\{B\}-P\{A\cap B\}$，因此　$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$.

从古典概型的概率研究中，我们发现概率有下面三个基本性质：

(i) 对任何事件A，$P(A)\geqslant 0$(非负性)；

(ii) $P(\Omega)=1$(规范性)；

(iii) 若$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)^*$$

((有限)可加性).

例 3 一盒产品有 8 个正品 2 个次品,从盒中取产品二次,每次取一个,考虑二种情况:(1) 放回抽样,即第一次取出一个放回去,第二次再取一个.(2) 不放回抽样,即第一次取一个不放回,第二次再取一个.试分别就上面二种情况求:1. 取到二个产品都是正品的概率;2. 取到二个都是正品或都是次品的概率;3. 取到的二个中至少有一个是正品的概率.

解: 在情况 (1),设Ω为基本事件空间,基本事件总数为$10\times10=10^2$.

1. 设A为取到二个产品都是正品的事件,含基本事件数为$8\times8=8^2$,于是$P\{A\}=\dfrac{8^2}{10^2}=0.64$.

2. 设B为取到二个产品都是次品的事件,含基本事件数为$2\times2=2^2$,于是$P\{B\}=\dfrac{2^2}{10^2}=0.04$. 因为$A, B$为互不相容事件,所以$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}=0.68$.

3. 设C为取到二个产品至少有一个是正品的事件,则

$$P\{C\}=P\{\bar{B}\}=1-P\{B\}=1-0.04=0.96.$$

在情况(2),Ω 中基本事件总数为10×9.

1. A含基本事件数为8×7,所以

$$P\{A\}=\frac{8\times7}{10\times9}\approx0.62,$$

2. B含基本事件数为2×1,所以

* 当$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互不相容时,其并$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$记为$A_1+A_2+\cdots+A_m$.