高等学校教材

工程数学
计算方法

吉林大学数学学院

主编　王新民　术洪亮

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

工程数学

计算方法

吉林大学数学学院

主编　王新民　术洪亮

高等教育出版社

内容简介

本书着重介绍了能够在计算机上得以实现的一些数值解法，如各种形式的代数插值方法；在工程中经常使用的平方逼近方法、数值积分法，以及在求微分方程数值解时经常遇到的线性代数方程组的数值解法；还有解非线性方程和方程组的迭代方法、矩阵特征值与特征向量的计算以及常微分方程初值问题的各种解法。并且针对各种算法讨论了误差估计及其收敛性和稳定性等问题。

本书内容丰富，取材精练；阐述严谨，脉络分明；推导翔实，重点突出。具有广泛的可读性和应用性。本书可作为非数学专业高年级本科生和理工科研究生的教材使用，也可供从事数值计算研究的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：计算方法/王新民，术洪亮主编．—北京：高等教育出版社，2005．11

ISBN 7－04－017793－5

Ⅰ．工…　Ⅱ．①王…②术…　Ⅲ．工程数学　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124319 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　张长虹　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　史新薇　**责任校对**　杨凤玲　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http: //www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http: //www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市联华印刷厂		

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 11 月第 1 版
印　　张	12.75	**印　　次**	2005 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	**定　　价**	15.20元

物料号　17793－00

前　言

自然科学、军事科学、社会科学以及其他科学部门的技术发展已经从定性走向了定量化，要想使我们国家的科学技术赶超发达国家的水平，首先要强化数学、发展数学。尤其在21世纪这个信息时代，各种问题以其不同的数学形式出现在各个科学部门，留给了我们一个又一个有待攻克的难题，现在数学已经到了无孔不入的境地，它的重要性不言而喻。譬如，利用小波方法可以提供各种信息的压缩技术；利用求极值的共轭梯度法可以建立经济发展的最优计划模型；利用有限元等数值手段可以预测地下的矿藏储量；就连现代医学上使用的CT技术也是以数学上的“拉东变换”为理论依据的。

本书主要讨论在工程技术等领域中常用的计算方法。这些方法是在计算机技术的基础上发展起来的，因为在许多工程问题中，我们常常要把实际问题归结为数学模型，而由于问题的复杂性，常常得不到模型的准确解，只能将它离散化后求其数值解，这个过程没有计算机是不可想象的。

众所周知，微积分是数学的重要组成部分，所研究的对象是函数。而对于函数来说，一方面除了一些简单的函数外，它的求值、求导和求积分通常都很困难；另一方面，在实际应用中，更多的函数关系是由测量或观测数值给出的。为了对这些函数进行计算，本书介绍了数值逼近方法，即用一类“简单函数”来逼近（或称代替）这些函数，使其能在计算机上容易求函数值、导数值和积分值；本书还利用这一逼近思想讨论了非线性方程的求根问题、矩阵的特征值与特征向量的计算和常微分方程初值问题的求解；特别介绍了在工程中常见的线性代数方程组的数值解法问题。在讨论这些理论和算法构造的同时，本书对算法的稳定性、收敛性以及误差估计等也做出了较详细的分析。所有这些理论和方法都是解决工程问题时必不可少的工具。

本书作为非数学专业研究生和高年级本科生的《计算方法》教材已使用多年，形成了自己的特色：

1. 具有很强的使用性：取材精练，难易适中，应用广泛，可靠性强。
2. 具有一定的可读性：深入浅出，推导翔实，重点明确，阐述严谨。
3. 具有较高的艺术性：语言流畅，结构紧凑，前后呼应，脉络分明。
4. 具有丰富的实践性：内容互动，例题丰富，习题充分，便于编程。

另外，本书还保持了数学知识的系统性、严密性以及连贯性等特点。

本书由王新民、术洪亮主编，其中第一、二、三、四、五、八章由王新民编写，第

六章由王新民、术洪亮编写，第七章由术洪亮编写，张静汇编了大量习题，李辉来教授、吴晓俐女士对本书的编写给予了热情的支持和帮助，韩燕、吴丹阳、王军林、孙鹏为本书出版付出了辛勤的劳动，在此一并感谢！

冯果忱先生担任了本书的主审。

限于作者的学识和经验，本书难免有错误和不妥之处。如蒙赐教，不胜感谢。

编 者
2005.08.03

目　录

第一章 插值方法

实际问题中碰到的函数是各种各样的，有的表达式很复杂，有的甚至给不出数学式子，只是提供了一些离散数据，譬如某些点上的函数值和导数值. 由于问题的复杂性，直接研究函数可能很困难. 面对这种情况，一个很自然的想法是，设法将所考察的函数 $f(x)$ 简单化，就是说，构造某个简单函数 $\varphi(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似，然后通过处理 $\varphi(x)$ 获得关于 $f(x)$ 的结果. 这类处理方法称为逼近方法. 其中 $f(x)$ 叫做被逼近函数，$\varphi(x)$ 叫做逼近函数，两者之差

$$R(x)=f(x)-\varphi(x)$$

叫做逼近的误差或余项. 插值方法是逼近方法的一种. 如果要求逼近函数 $\varphi(x)$ 与被逼近函数 $f(x)$ 在一系列点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值或导函数值相等，即满足条件

$$y_i=\varphi(x_i),y_i'=\varphi'(x_i),i=0,1,\cdots,n,$$

则这类逼近问题就是插值问题. $\varphi(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节点，$y_i=\varphi(x_i)$，$y_i'=\varphi'(x_i)$ 称为插值条件. 一般说来，构造插值函数 $\varphi(x)$ 的办法很多，$\varphi(x)$ 既可以是一个代数多项式或三角多项式，也可以是有理多项式；既可以是任意光滑函数，也可以是分段光滑函数. 但通常使用的插值函数 $\varphi(x)$ 是多项式与样条函数.

插值函数 $\varphi(x)$ 除了用于近似计算 $f(x)$ 的函数值外，在数值积分、数值微分以及微分方程数值求解等领域中也有重要应用.

本章主要介绍多项式插值. 这不仅是因为多项式简单，而且因为在许多情况下，函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来.

§1 Lagrange 插值公式

1.1 插值问题的提法

设 $f(x)$ 是实变量 x 的单值函数，又设 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 x_i 处的函数值为 $y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$. 我们的问题是：构造一个次数不超过 n 的多项式①

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \tag{1.1}$$

① 在本章，次数不超过 n 的多项式经常泛称为"n 次式".

使 $P_n(x)$ 在节点 x_i 处满足条件

$$P_n(x_i)=f(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{1.2}$$

这个问题称为 n 次代数插值问题.

显然,为了确定满足条件(1.2)的多项式(1.1),只需确定参数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$. 由条件(1.2)可知,参数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$满足如下线性代数方程组:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0, \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

因为节点 x_i 互异,所以该方程组的系数行列式不为零,故方程组(1.3)的解存在且唯一,即上述插值问题的解存在且唯一. 所以我们有理由选择一条容易构造插值函数的途径. 下面我们先给出插值问题的 Lagrange 形式.

1.2　线性插值

先考察两个节点的 Lagrange 插值问题.

问题 1　设已知两个互异节点 x_0,x_1 上的函数值 $f(x_0)=y_0,f(x_1)=y_1$,求作一个形如 $L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$ 的一次式,使满足条件:

$$L_1(x_0)=y_0,L_1(x_1)=y_1.$$

显然,问题 1 中的 $l_0(x),l_1(x)$应为一次式. 根据插值问题的存在唯一性,我们知道,过两点可以确定一条直线,于是由两点式方程,便有

$$y=L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1, \tag{1.4}$$

其中

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

具有如下性质:

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j,\\0,i\neq j,\end{cases}\quad i,j=0,1.$$

称式(1.4)为 $f(x)$的线性 Lagrange 插值公式. 两个线性无关的一次式 $l_0(x)$与 $l_1(x)$称作线性插值的 Lagrange 插值基函数.

例 1.1　已知 $\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11$,求 $y=\sqrt{115}$.

解　取 $x_0=100,y_0=10,x_1=121,y_1=11$,将 $x=115$ 代入式(1.4)求得 $y=10.714\,28$. 与准确值$\sqrt{115}=10.723\,805$ 比较,这个插值结果有三位有效数字.

1.3　二次插值

线性插值仅仅利用了两个节点上的数据,插值结果的精度不高. 下面考察二

次 Lagrange 插值问题.

问题 2 设已知三个互异节点 x_0,x_1,x_2 上的函数值为

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2,$$

求作一个形如 $L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$ 的二次式,使满足条件:

$$L_2(x_0)=y_0, L_2(x_1)=y_1, L_2(x_2)=y_2.$$

根据插值问题的存在唯一性,不妨令

$$L_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)+B(x-x_0)(x-x_2)+C(x-x_0)(x-x_1),$$

由条件 $L_2(x_i)=y_i(i=0,1,2)$,得

$$A=y_0/(x_0-x_1)(x_0-x_2),$$
$$B=y_1/(x_1-x_0)(x_1-x_2),$$
$$C=y_2/(x_2-x_0)(x_2-x_1).$$

于是得到二次 Lagrange 插值公式:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2. \tag{1.5}$$

若记

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

或统一写成

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{2}\frac{x-x_i}{x_j-x_i},\quad j=0,1,2.$$

则可将二次 Lagrange 插值公式(1.5)写成

$$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=\sum_{j=0}^{2}y_jl_j(x)$$
$$=\sum_{j=0}^{2}\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{2}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)y_j, \tag{1.6}$$

其中二次插值基函数 $l_j(x)$ 与线性插值基函数一样也具有如下性质:

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j,\end{cases}\quad i,j=0,1,2.$$

例 1.2 利用 100,121,144 的开平方值求 $\sqrt{115}$.

解 取 $x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x_2=144, y_2=12$，将 $x=115$ 代入式(1.6)求得 $y=10.722\,8$. 与准确值 $\sqrt{115}=10.723\,805$ 比较，这个插值结果有四位有效数字.

1.4 *n* 次插值

现在考虑一般形式的 Lagrange 插值公式.

问题 3 设已知 $n+1$ 个互异节点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 上的函数值 $f(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，求作一个形如 $L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)$ 的 n 次式，使满足条件(1.2). 其中，$l_j(x)$ 称为 n 次 Lagrange 插值基函数.

据插值问题的唯一性，并依据线性和二次 Lagrange 插值基函数 $l_j(x)$ 的性质，我们有理由推测：$l_j(x)$ 也应满足条件

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j,\end{cases}\quad i,j=0,1,\cdots,n. \tag{1.7}$$

容易验证，在此条件下

$$L_n(x_i)=\sum_{j=0}^{n}y_jl_j(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{1.8}$$

因此，问题 3 可归结为：构造满足条件(1.7)的 n 次式 $l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$.

下面构造 $l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$：

由条件(1.7)可知，$l_j(x)$ 具有 n 个零点 $x_0,x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n$. 因 $l_j(x)$ 是 n 次式，故有

$$l_j(x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 A 为待定的常数. 由条件 $l_j(x_j)=1$，可得

$$A=\frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

于是有

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

或写成

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i},\quad j=0,1,\cdots,n,$$

这样便有

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}y_jl_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)y_j, \tag{1.9}$$

称此式为 n 次 Lagrange 插值公式.

引进记号：

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

于是有

$$\omega_{n+1}'(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n).$$

从而可将 n 次 Lagrange 插值基函数 $l_j(x)$写成

$$l_j(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega_{n+1}'(x_j)}.$$

这时，式(1.9)可改写为

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega_{n+1}'(x_j)}y_j. \tag{1.10}$$

Lagrange 插值公式(1.9)或(1.10)具有结构紧凑、便于在微机上实现的特点.

例 1.3 求经过 $A(0,1),B(1,2),C(2,3)$三个样点的插值多项式.

解 由题意可知，三个插值节点及对应的函数值为

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2,$$
$$y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3.$$

由二次 Lagrange 插值公式得

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3 \\ &= x+1. \end{aligned}$$

1.5 插值多项式的余项

记

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

称 $R_n(x)$为插值函数 $L_n(x)$的截断误差或余项.

下面化 $R_n(x)$为便于使用的形式.

定理 1.1 假设 $f(x)$在$[a,b]$上有 $n+1$ 阶导数，$x_i(i=0,1,\cdots,n)$是$[a,b]$上的互异节点，则对 $\forall x \in [a,b]$，存在与其有关的 $\xi \in (a,b)$，使

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{1.11}$$

证明 当 $x = x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$时，显然有 $R_n(x_i) = 0, i=0,1,\cdots,n$. 以下设 $x \neq x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$. 根据 $R_n(x)$的特征，它应具有如下形式：

$$R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.12}$$

其中 $K(x)$为待定的函数. 为确定它，引进辅助函数：

$$F(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t),$$

此处视 x 为异于节点的一固定点，这样，$F(t)$ 至少有 $n+2$ 个互异的零点 $x,x_0,x_1,\cdots,x_n$，据假定，$f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数，故 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上也具有 $n+1$ 阶导数. 于是依 Rolle 定理可知，$F'(t)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个互异的零点；$F''(t)$ 在 (a,b) 内至少有 n 个互异的零点；依次类推，$F^{(n+1)}(t)$ 于 (a,b) 内至少有一个零点 ξ，即在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)=0,$$

于是

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

将它代入式(1.12)，便得到式(1.11). □

在式(1.11)中，若记 $M_{n+1}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|$，便有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{1.13}$$

或者

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\omega_{n+1}(x)|.$$

Lagrange 余项定理在理论上有重要价值，它刻画了 Lagrange 插值的某些基本特征.

注 1.1 通常将插值节点所界定的范围 $\Delta=[\min x_i,\max x_i]$ 称为插值区间，将函数值待求的点 x 称为插值点. 如果插值点 x 位于插值区间内，这种插值过程称为内插，否则称为外推. 余项定理表明，外推是不可靠的.

注 1.2 余项中含有高阶导数 $f^{(n+1)}(\xi)$，这就要求 $f(x)$ 是足够光滑的. 如果所逼近的函数 $f(x)$ 光滑性差，则代数插值不一定能奏效. 因为代数多项式是任意光滑的，所以原则上只适用于逼近光滑性好的函数.

注 1.3 Lagrange 插值与 Taylor 插值有本质不同. Taylor 插值问题是：求作一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使满足条件

$$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,\cdots,n.$$

对于给定的 $f(x)$，若导数值 $f^{(k)}(x_0)$ 已知，则 Taylor 插值问题的解为

$$\begin{aligned}P_n(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\\&\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.\end{aligned} \tag{1.14}$$

其余项为

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

由此可以看出，$P_n(x)$ 在点 x_0 邻近会很好地逼近 $f(x)$，但 Taylor 插值要求

提供 $f(x)$ 在点 x_0 处的各阶导数值，这项要求很苛刻，函数 $f(x)$ 的表达式必须相当简单才行. 在实际问题中，如果仅仅给出了一系列节点上的函数值 $f(x_i)=y_i$，$i=0,1,2,\cdots,n$，则应采用 Lagrange 插值，而不应采用 Taylor 插值.

注 1.4　如果只提供了 $f(x)$ 的一些离散值，并没给出具体的分析式子，就无法利用公式(1.13)来估计误差了，这时可采用下面的方法.

考察三个节点 x_0,x_1,x_2. 对于插值点 x，用 x_0,x_1 作线性插值，求出 $y=f(x)$ 的一个近似值，记为 y_1，再用 x_0,x_2 作线性插值求得另一个近似值，记为 y_2，依余项定理

$$y-y_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1),$$

$$y-y_2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2),$$

其中 ξ_1,ξ_2 均属于所考察的区间 $[a,b]$. 假设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 内改变不大，则

$$y\approx\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2,$$

故有

$$y-y_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1). \tag{1.15}$$

式(1.15)表明，插值结果 y_1 的误差 $y-y_1$ 可以通过两个结果的偏差 y_2-y_1 来估计. 这种直接用计算结果估计误差的方法称为**事后估计法**.

例 1.4　用事后估计法考察例 1.1 的误差.

先取 $x_0=100,x_1=121$ 作为节点，例 1.1 已求得近似值 $y_1=10.714\,28$. 设再取 $x_0=100,x_2=144$ 作节点，用线性插值可求得另一个结果 $y_2=10.681\,82$，依估计式(1.15)有

$$y-y_1\approx\frac{115-121}{144-121}(10.681\,82-10.714\,28)=0.008\,47,$$

用这个误差值来修正结果 y_1，可得到新的近似值

$$y=10.714\,28+0.008\,47=10.722\,8,$$

而这个修正后的结果恰与例 1.2 中二次插值的结果相同. 这个有趣的现象并不是偶然的巧合，其中的道理请同学们来思考.

例 1.5　设 $f(x)=\ln x$，并假定已给出数表

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x$	$-0.916\,291$	$-0.693\,147$	$-0.356\,675$	$-0.223\,144$

试近似估值 $\ln 0.6$，并指出精度.