

高等學校教材

工程数学 计算方法

吉林大学数学学院

主编 王新民 术洪亮



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

工 程 数 学

计 算 方 法

吉林大学数学学院

主编 王新民 米洪亮

高等教育出版社

内容简介

本书着重介绍了能够在计算机上得以实现的一些数值解法,如各种形式的代数插值方法;在工程中经常使用的平方逼近方法、数值积分法,以及在求微分方程数值解时经常遇到的线性代数方程组的数值解法;还有解非线性方程和方程组的迭代方法、矩阵特征值与特征向量的计算以及常微分方程初值问题的各种解法。并且针对各种算法讨论了误差估计及其收敛性和稳定性等问题。

本书内容丰富,取材精练;阐述严谨,脉络分明;推导翔实,重点突出。具有广泛的可读性和应用性。本书可作为非数学专业高年级本科生和理工科研究生的教材使用,也可供从事数值计算研究的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学:计算方法/王新民,术洪亮主编. —北京:高等教育出版社,2005.11

ISBN 7-04-017793-5

I. 工... II. ①王... ②术... III. 工程数学 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 124319 号

策划编辑 王 强 责任编辑 张长虹 封面设计 王凌波 责任绘图 杜晓丹
版式设计 史新薇 责任校对 杨凤玲 责任印制 杨 明

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市联华印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>

开 本 787×960 1/16
印 张 12.75
字 数 230 000

版 次 2005 年 11 月第 1 版
印 次 2005 年 11 月第 1 次印刷
定 价 15.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17793-00

前 言

自然科学、军事科学、社会科学以及其他科学部门的技术发展已经从定性走向了定量化,要想使我们国家的科学技术赶超发达国家的水平,首先要强化数学、发展数学。尤其在 21 世纪这个信息时代,各种问题以其不同的数学形式出现在各个科学部门,留给了我们一个又一个有待攻克的难题,现在数学已经到了无孔不入的境地,它的重要性不言而喻。譬如,利用小波方法可以提供各种信息的压缩技术;利用求极值的共轭梯度法可以建立经济发展的最优计划模型;利用有限元等数值手段可以预测地下的矿藏储量;就连现代医学上使用的 CT 技术也是以数学上的“拉东变换”为理论依据的。

本书主要讨论在工程技术等领域中常用的计算方法。这些方法是在计算机技术的基础上发展起来的,因为在许多工程问题中,我们常常要把实际问题归结为数学模型,而由于问题的复杂性,常常得不到模型的准确解,只能将它离散化后求其数值解,这个过程没有计算机是不可想象的。

众所周知,微积分是数学的重要组成部分,所研究的对象是函数。而对于函数来说,一方面除了一些简单的函数外,它的求值、求导和求积分通常都很困难;另一方面,在实际应用中,更多的函数关系是由测量或观测数值给出的。为了对这些函数进行计算,本书介绍了数值逼近方法,即用一类“简单函数”来逼近(或称代替)这些函数,使其能在计算机上容易求函数值、导数值和积分值;本书还利用这一逼近思想讨论了非线性方程的求根问题、矩阵的特征值与特征向量的计算和常微分方程初值问题的求解;特别介绍了在工程中常见的线性代数方程组的数值解法问题。在讨论这些理论和算法构造的同时,本书对算法的稳定性、收敛性以及误差估计等也做出了较详细的分析。所有这些理论和方法都是解决工程问题时必不可少的工具。

本书作为非数学专业研究生和高年级本科生的《计算方法》教材已使用多年,形成了自己的特色:

1. 具有很强的使用性:取材精练,难易适中,应用广泛,可靠性强。
2. 具有一定的可读性:深入浅出,推导翔实,重点明确,阐述严谨。
3. 具有较高的艺术性:语言流畅,结构紧凑,前后呼应,脉络分明。
4. 具有丰富的实践性:内容互动,例题丰富,习题充分,便于编程。

另外,本书还保持了数学知识的系统性、严密性以及连贯性等特点。

本书由王新民、术洪亮主编,其中第一、二、三、四、五、八章由王新民编写,第

六章由王新民、术洪亮编写,第七章由术洪亮编写,张静汇编了大量习题,李辉来教授、吴晓俐女士对本书的编写给予了热情的支持和帮助,韩燕、吴丹阳、王军林、孙鹏为本书出版付出了辛勤的劳动,在此一并感谢!

冯果忱先生担任了本书的主审。

限于作者的学识和经验,本书难免有错误和不妥之处。如蒙赐教,不胜感谢。

编 者

2005.08.03

目 录

第一章 插值方法	1
§ 1 Lagrange 插值公式	1
1.1 插值问题的提法	1
1.2 线性插值	2
1.3 二次插值	2
1.4 n 次插值	4
1.5 插值多项式的余项	5
§ 2 Newton 插值公式	8
2.1 差商及其性质	9
2.2 Newton 插值公式	10
§ 3 Hermite 插值	14
3.1 Hermite 插值公式的构造	14
3.2 Hermite 插值余项	17
§ 4 分段插值	18
4.1 高次插值的 Runge 现象	18
4.2 分段低次插值	19
4.3 分段三次 Hermite 插值	20
§ 5 三次样条插值	22
5.1 样条函数的概念	22
5.2 三次样条插值	23
习题一	28
第二章 最佳平方逼近	30
§ 1 正交多项式	30
1.1 正交函数系与正交多项式	30
1.2 正交多项式的性质	33
1.3 Legendre 多项式	35
1.4 Chebyshev 多项式	37
1.5 其他常用的正交多项式	38
§ 2 最小二乘拟合多项式	39
§ 3 一般最小二乘逼近问题的提法	41

3.1 广义多项式与权系数	41
3.2 一般最小二乘逼近问题的提法	42
3.3 正规方程组	43
§4 用正交多项式作最佳平方逼近	45
4.1 Legendre 多项式的应用	46
4.2 Chebyshev 多项式的应用	47
习题二	48
第三章 数值积分	50
§1 数值求积公式的概念	50
1.1 构造求积公式的思想	50
1.2 求积公式的余项	51
1.3 代数精度的概念	51
1.4 求积公式的收敛性与稳定性	52
§2 Newton - Cotes 求积公式	52
2.1 公式的一般形式	53
2.2 常用的 Newton - Cotes 公式	53
§3 复化求积公式	57
3.1 复化梯形公式	58
3.2 复化 Simpson 公式	59
§4 变步长积分法	61
§5 Romberg 方法	63
§6 Gauss 求积公式	65
6.1 问题的提出	65
6.2 公式的构造	67
6.3 Gauss 求积公式的收敛性与稳定性	70
6.4 常用的 Gauss 求积公式	71
习题三	74
第四章 解线性代数方程组的直接方法	76
§1 Gauss 消去法	76
1.1 Gauss 消去法的基本思想	76
1.2 Gauss 主元消去法	78
1.3 Gauss 消去法的矩阵形式	80
§2 矩阵三角分解法	83
2.1 Doolittle 分解法	83
2.2 Crout 分解法	85

2.3 平方根法	86
2.4 追赶法	90
§ 3 误差分析	91
3.1 关于方程组的解的精度	91
3.2 向量的范数	92
3.3 矩阵的范数	94
3.4 扰动方程组解的误差界	96
3.5 病态方程组的解法	100
习题四	102
第五章 解线性代数方程组的迭代法	105
§ 1 Jacobi 迭代法	105
1.1 迭代格式的构造	105
1.2 Jacobi 迭代法的收敛性	106
§ 2 Gauss-Seidel 迭代法	108
2.1 Gauss-Seidel 迭代格式	108
2.2 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性	109
§ 3 SOR 迭代法	111
3.1 SOR 迭代格式	111
3.2 SOR 迭代法的收敛性	112
§ 4 最速下降法及共轭斜量法	114
4.1 最速下降法	115
4.2 共轭斜量法	116
习题五	118
第六章 非线性方程和方程组的迭代解法	121
§ 1 方程 $f(x)=0$ 的根与二分法	121
1.1 方程根的概念	121
1.2 二分法	122
§ 2 迭代法及其收敛法	123
2.1 迭代格式的构造及收敛条件	123
2.2 迭代法的局部收敛性	127
§ 3 Aitken 加速迭代法	129
§ 4 Newton 迭代法	131
4.1 Newton 迭代格式	131
4.2 Newton 法的局部收敛性	132
4.3 关于重根的进一步讨论	134

§ 5 弦截法与抛物线法	135
5.1 弦截法	135
5.2 抛物线法	137
§ 6 非线性方程组的迭代解法	138
6.1 不动点迭代法	139
6.2 Newton 迭代法	140
习题六	141
第七章 矩阵的特征值与特征向量	144
§ 1 问题的提出	144
§ 2 乘幂法和反幂法	144
2.1 乘幂法	145
2.2 改进的乘幂法	146
2.3 加速收敛技巧	149
2.4 反幂法	151
§ 3 实对称矩阵的 Jacobi 方法	153
3.1 Jacobi 方法的基本思想	153
3.2 Jacobi 方法及其收敛性	154
习题七	158
第八章 常微分方程初值问题的数值解法	160
§ 1 问题的提出	160
§ 2 Euler 方法	161
2.1 Euler 格式的建立	161
2.2 改进的 Euler 方法	163
§ 3 Runge - Kutta 方法	165
3.1 Runge - Kutta 方法的基本思想	165
3.2 二阶 Runge - Kutta 格式	166
3.3 三阶 Runge - Kutta 格式	168
3.4 四阶 Runge - Kutta 格式	169
§ 4 线性多步法	170
4.1 问题的提出	170
4.2 Adams 格式	171
4.3 Adams 预估校正格式	173
4.4 Simpson 与 Milne 方法	174
4.5 Hamming 方法	176
§ 5 方程组与高阶方程	177

5.1 一阶方程组	177
5.2 化高阶方程为一阶方程组	178
习题八	180
习题参考答案	183
参考文献	193

第一章 插值方法

实际问题中碰到的函数是各种各样的,有的表达式很复杂,有的甚至给不出数学式子,只是提供了一些离散数据,譬如某些点上的函数值和导数值.由于问题的复杂性,直接研究函数可能很困难.面对这种情况,一个很自然的想法是,设法将所考察的函数 $f(x)$ 简单化,就是说,构造某个简单函数 $\varphi(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似,然后通过处理 $\varphi(x)$ 获得关于 $f(x)$ 的结果.这类处理方法称为逼近方法.其中 $f(x)$ 叫做被逼近函数, $\varphi(x)$ 叫做逼近函数,两者之差

$$R(x) = f(x) - \varphi(x)$$

叫做逼近的误差或余项.插值方法是逼近方法的一种.如果要求逼近函数 $\varphi(x)$ 与被逼近函数 $f(x)$ 在一系列点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的函数值或导数值相等,即满足条件

$$y_i = \varphi(x_i), y'_i = \varphi'(x_i), i = 0, 1, \dots, n,$$

则这类逼近问题就是插值问题. $\varphi(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数, $x_0, x_1, \dots, x_n$ 称为插值节点, $y_i = \varphi(x_i), y'_i = \varphi'(x_i)$ 称为插值条件.一般说来,构造插值函数 $\varphi(x)$ 的办法很多, $\varphi(x)$ 既可以是一个代数多项式或三角多项式,也可以是有理多项式;既可以是任意光滑函数,也可以是分段光滑函数.但通常使用的插值函数 $\varphi(x)$ 是多项式与样条函数.

插值函数 $\varphi(x)$ 除了用于近似计算 $f(x)$ 的函数值外,在数值积分、数值微分以及微分方程数值求解等领域中也有重要应用.

本章主要介绍多项式插值.这不仅是因为多项式简单,而且因为在许多情况下,函数 $f(x)$ 容易用多项式近似地表示出来.

§ 1 Lagrange 插值公式

1.1 插值问题的提法

设 $f(x)$ 是实变量 x 的单值函数,又设 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 x_i 处的函数值为 $y_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$. 我们的问题是:构造一个次数不超过 n 的多项式^①

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (1.1)$$

^① 在本章,次数不超过 n 的多项式经常泛称为“ n 次式”.

使 $P_n(x)$ 在节点 x_i 处满足条件

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

这个问题称为 n 次代数插值问题.

显然, 为了确定满足条件 (1.2) 的多项式 (1.1), 只需确定参数 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$. 由条件 (1.2) 可知, 参数 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 满足如下线性代数方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \quad (1.3)$$

因为节点 x_i 互异, 所以该方程组的系数行列式不为零, 故方程组 (1.3) 的解存在且唯一, 即上述插值问题的解存在且唯一. 所以我们有理由选择一条容易构造插值函数的途径. 下面我们先给出插值问题的 Lagrange 形式.

1.2 线性插值

先考察两个节点的 Lagrange 插值问题.

问题 1 设已知两个互异节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$, 求作一个形如 $L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$ 的一次式, 使满足条件:

$$L_1(x_0) = y_0, L_1(x_1) = y_1.$$

显然, 问题 1 中的 $l_0(x), l_1(x)$ 应为一次式. 根据插值问题的存在唯一性, 我们知道, 过两点可以确定一条直线, 于是由两点式方程, 便有

$$y = L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1, \quad (1.4)$$

其中

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

具有如下性质:

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j=0, 1.$$

称式 (1.4) 为 $f(x)$ 的线性 Lagrange 插值公式. 两个线性无关的一次式 $l_0(x)$ 与 $l_1(x)$ 称作线性插值的 Lagrange 插值基函数.

例 1.1 已知 $\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11$, 求 $y=\sqrt{115}$.

解 取 $x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11$, 将 $x=115$ 代入式 (1.4) 求得 $y=10.71428$. 与准确值 $\sqrt{115}=10.723805$ 比较, 这个插值结果有三位有效数字.

1.3 二次插值

线性插值仅仅利用了两个节点上的数据, 插值结果的精度不高. 下面考察二

次 Lagrange 插值问题.

问题 2 设已知三个互异节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值为

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2,$$

求作一个形如 $L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$ 的二次式, 使满足条件:

$$L_2(x_0)=y_0, L_2(x_1)=y_1, L_2(x_2)=y_2.$$

根据插值问题的存在唯一性, 不妨令

$$L_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)+B(x-x_0)(x-x_2)+C(x-x_0)(x-x_1),$$

由条件 $L_2(x_i)=y_i (i=0, 1, 2)$, 得

$$A=y_0/(x_0-x_1)(x_0-x_2),$$

$$B=y_1/(x_1-x_0)(x_1-x_2),$$

$$C=y_2/(x_2-x_0)(x_2-x_1).$$

于是得到二次 Lagrange 插值公式:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \\ &\quad \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

若记

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

或统一写成

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^2 \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \quad j=0, 1, 2.$$

则可将二次 Lagrange 插值公式(1.5)写成

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = \sum_{j=0}^2 y_j l_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^2 \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^2 \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right] y_j, \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中二次插值基函数 $l_j(x)$ 与线性插值基函数一样也具有如下性质:

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j=0, 1, 2.$$

例 1.2 利用 100, 121, 144 的开平方值求 $\sqrt{115}$.

解 取 $x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x_2=144, y_2=12$, 将 $x=115$ 代入式(1.6)求得 $y=10.7228$. 与准确值 $\sqrt{115}=10.723805$ 比较, 这个插值结果有四位有效数字.

1.4 n 次插值

现在考虑一般形式的 Lagrange 插值公式.

问题 3 设已知 $n+1$ 个互异节点 $x_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 上的函数值 $f(x_i)=y_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 求作一个形如 $L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\dots+y_nl_n(x)$ 的 n 次式, 使满足条件(1.2). 其中, $l_j(x)$ 称为 n 次 Lagrange 插值基函数.

据插值问题的唯一性, 并依据线性和二次 Lagrange 插值基函数 $l_j(x)$ 的性质, 我们有理由推测: $l_j(x)$ 也应满足条件

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad i, j=0, 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

容易验证, 在此条件下

$$L_n(x_i)=\sum_{j=0}^n y_j l_j(x_i)=y_i, \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

因此, 问题 3 可归结为: 构造满足条件(1.7)的 n 次式 $l_j(x) (j=0, 1, \dots, n)$.

下面构造 $l_j(x) (j=0, 1, \dots, n)$:

由条件(1.7)可知, $l_j(x)$ 具有 n 个零点 $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. 因 $l_j(x)$ 是 n 次式, 故有

$$l_j(x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 A 为待定的常数. 由条件 $l_j(x_j)=1$, 可得

$$A=\frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

于是有

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

或写成

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^n \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \quad j=0, 1, \dots, n,$$

这样便有

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^n y_j l_j(x)=\sum_{j=0}^n \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^n \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right] y_j, \quad (1.9)$$

称此式为 n 次 Lagrange 插值公式.

引进记号:

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

于是有

$$\omega'_{n+1}(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n).$$

从而可将 n 次 Lagrange 插值基函数 $l_j(x)$ 写成

$$l_j(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}.$$

这时, 式(1.9)可改写为

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} y_j. \quad (1.10)$$

Lagrange 插值公式(1.9)或(1.10)具有结构紧凑、便于在微机上实现的特点.

例 1.3 求经过 $A(0,1), B(1,2), C(2,3)$ 三个样点的插值多项式.

解 由题意可知, 三个插值节点及对应的函数值为

$$x_0=0, x_1=1, x_2=2,$$

$$y_0=1, y_1=2, y_2=3.$$

由二次 Lagrange 插值公式得

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 3 \\ &= x+1. \end{aligned}$$

1.5 插值多项式的余项

记

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

称 $R_n(x)$ 为插值函数 $L_n(x)$ 的截断误差或余项.

下面化 $R_n(x)$ 为便于使用的形式.

定理 1.1 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, $x_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 是 $[a, b]$ 上的互异节点, 则对 $\forall x \in [a, b]$, 存在与其有关的 $\xi \in (a, b)$, 使

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x). \quad (1.11)$$

证明 当 $x = x_i (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 时, 显然有 $R_n(x_i) = 0, i=0, 1, \cdots, n$. 以下设 $x \neq x_i (i=0, 1, 2, \cdots, n)$. 根据 $R_n(x)$ 的特征, 它应具有如下形式:

$$R_n(x) = K(x) \omega_{n+1}(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.12)$$

其中 $K(x)$ 为待定的函数. 为确定它, 引进辅助函数:

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t),$$

此处视 x 为异于节点的一固定点, 这样, $F(t)$ 至少有 $n+2$ 个互异的零点 $x, x_0, x_1, \dots, x_n$, 据假定, $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 故 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上也具有 $n+1$ 阶导数. 于是依 Rolle 定理可知, $F'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个互异的零点; $F''(t)$ 在 (a, b) 内至少有 n 个互异的零点; 依次类推, $F^{(n+1)}(t)$ 于 (a, b) 内至少有一个零点 ξ , 即在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0,$$

于是

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

将它代入式(1.12), 便得到式(1.11). □

在式(1.11)中, 若记 $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, 便有

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (1.13)$$

或者

$$\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Lagrange 余项定理在理论上有重要价值, 它刻画了 Lagrange 插值的某些基本特征.

注 1.1 通常将插值节点所界定的范围 $\Delta = [\min x_i, \max x_i]$ 称为插值区间, 将函数值待求的点 x 称为插值点. 如果插值点 x 位于插值区间内, 这种插值过程称为内插, 否则称为外推. 余项定理表明, 外推是不可靠的.

注 1.2 余项中含有高阶导数 $f^{(n+1)}(\xi)$, 这就要求 $f(x)$ 是足够光滑的. 如果所逼近的函数 $f(x)$ 光滑性差, 则代数插值不一定能奏效. 因为代数多项式是任意光滑的, 所以原则上只适用于逼近光滑性好的函数.

注 1.3 Lagrange 插值与 Taylor 插值有本质不同. Taylor 插值问题是: 求作一个 n 次多项式 $P_n(x)$, 使满足条件

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

对于给定的 $f(x)$, 若导数值 $f^{(k)}(x_0)$ 已知, 则 Taylor 插值问题的解为

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (1.14)$$

其余项为

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

由此可以看出, $P_n(x)$ 在点 x_0 附近会很好地逼近 $f(x)$, 但 Taylor 插值要求

提供 $f(x)$ 在点 x_0 处的各阶导数值, 这项要求很苛刻, 函数 $f(x)$ 的表达式必须相当简单才行. 在实际问题中, 如果仅仅给出了一系列节点上的函数值 $f(x_i) = y_i, i=0, 1, 2, \dots, n$, 则应采用 Lagrange 插值, 而不应采用 Taylor 插值.

注 1.4 如果只提供了 $f(x)$ 的一些离散值, 并没给出具体的分析式子, 就无法利用公式(1.13)来估计误差了, 这时可采用下面的方法.

考察三个节点 x_0, x_1, x_2 . 对于插值点 x , 用 x_0, x_1 作线性插值, 求出 $y = f(x)$ 的一个近似值, 记为 y_1 , 再用 x_0, x_2 作线性插值求得另一个近似值, 记为 y_2 , 依余项定理

$$y - y_1 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0)(x - x_1),$$

$$y - y_2 = \frac{f''(\xi_2)}{2}(x - x_0)(x - x_2),$$

其中 ξ_1, ξ_2 均属于所考察的区间 $[a, b]$. 假设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 内改变不大, 则

$$y \approx \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2,$$

故有

$$y - y_1 \approx \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_2 - y_1). \quad (1.15)$$

式(1.15)表明, 插值结果 y_1 的误差 $y - y_1$ 可以通过两个结果的偏差 $y_2 - y_1$ 来估计. 这种直接用计算结果估计误差的方法称为事后估计法.

例 1.4 用事后估计法考察例 1.1 的误差.

先取 $x_0 = 100, x_1 = 121$ 作为节点, 例 1.1 已求得近似值 $y_1 = 10.71428$. 设再取 $x_0 = 100, x_2 = 144$ 作节点, 用线性插值可求得另一个结果 $y_2 = 10.68182$, 依估计式(1.15)有

$$y - y_1 \approx \frac{115 - 121}{144 - 121} (10.68182 - 10.71428) = 0.00847,$$

用这个误差值来修正结果 y_1 , 可得到新的近似值

$$y = 10.71428 + 0.00847 = 10.7228,$$

而这个修正后的结果恰与例 1.2 中二次插值的结果相同. 这个有趣的现象并不是偶然的巧合, 其中的道理请同学们来思考.

例 1.5 设 $f(x) = \ln x$, 并假定已给出数表

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

试近似估值 $\ln 0.6$, 并指出精度.