21 世纪高等院校教材

概率与统计

（第二版）

陈　萍　李　文
张正军　金　忠　编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

概 率 与 统 计

（第二版）

陈 萍 李 文
张正军 金 忠 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书为高等院校理工科概率与统计基础课教材，内容包括概率论基础知识、随机变量、随机变量的数字特征、数理统计基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析初步、随机过程初步. 附录中还有常用的MATLAB概率统计软件的简介. 与第一版相比，除了增加窄带过程等内容，还提供了配套的PowerPoint电子教案.

本书适合作为高等院校非数学专业学生的教材，还可供教师及工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率与统计/陈萍等编. —2版. —北京：科学出版社，2006
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-016466-0

Ⅰ. 概… Ⅱ. 陈… Ⅲ. ①概率论-高等院校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第133677号

责任编辑：赵 靖 / 责任校对：赵桂芬
责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年1月第 二 版 印张:15
2006年1月第三次印刷 字数:281 000
印数:12 001—16 000

定价： 20.00元(含光盘)

第二版前言

本书是在 2002 年科学出版社出版的《概率与统计》基础上修订的. 在这一版中我们对原书的一些疏漏和不妥之处作了修改,增加了 7.1.5 节"线性假设的显著性检验"、7.3 节"多元线性回归分析"和 8.9 节"窄带过程简介". 其中,第 1,2,7 章由陈萍修订,第 4,5,6 章由李文修订,第 3,8 章及附录由张正军修订.

考虑到教师授课和学生自学的需要,第二版提供了与本书配套的 PowerPoint 课件. 该课件以章节形式编排,重要的概念及性质旁边注明本书相应页码,便于配合本书学习. 课件包括第 1 章:概率论基础知识、第 2 章:随机变量、第 3 章:随机变量的数字特征、第 4 章:数理统计基本概念、第 5 章:参数估计、第 6 章:假设检验、第 7 章:回归分析与方差分析初步和第 8 章:随机过程初步. 南京理工大学理学院统计与金融数学系的全体教师都参加了课件的制作与修订. 最后,陈萍、张正军对整个课件进行统稿.

限于编者水平,书中不足之处,恳请国内同行和读者批评指正.

第一版前言

概率与统计课程是工科各专业重要的公共基础课.为适应教学的需要,我们集概率统计全体任课教师多年的教学与科研经验、结合工科概率统计课程的特点编写了本书.内容编排上,在满足研究生统考大纲的前提下,本书着重介绍工程技术中常用的概率与统计的概念、方法,注意交代概念的实际意义,体现由浅入深、启发诱导的教学法,并通过精选的实例使读者加深对概念的理解,并在附录中增加了目前工程上常用的 MATLAB 概率统计软件的简介,更适合工科学生的学习及工程技术人员参考.

全书共分 8 章,内容包括概率论基础知识、随机变量、随机变量的数字特征、数理统计基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析初步、随机过程初步.其中第 1、2、7 章由陈萍执笔,第 3 章由金忠执笔,第 4、5、6 章由李文执笔,第 8 章由张正军执笔,附录由罗毅提供.最后,陈萍对全书进行统稿.书稿虽经多次修改,但限于编者水平,仍会有缺点和错误,恳请读者批评指正.

目　　录

绪　论

从辩证法角度来看，物质世界中存在必然性与或然性这样一对对立的范畴．必然性是指某种事物在一定条件下必然发生的现象．如在一个标准大气压下纯水加热到 100 度就将沸腾．又如同性电荷必相互排斥，异性电荷必相互吸引，等等．或然性是指某种事物在一定条件下可能发生也可能不发生的现象．如掷一枚均匀的硬币可能会出现国徽一面向上，或币值一面向上的结果(这里我们不考虑硬币立起或丢失的情况)．数学中又把具有或然性的现象称为随机现象．

以下仍以掷均匀的硬币为例．尽管在掷硬币之前人们不能预料即将出现的结果，但是如果多次重复掷硬币且记录结果之后会发现硬币两面出现次数之比接近于 1．类似的结果在其他的随机现象中也是存在的．我们把随机现象的这种性质称为是随机现象的统计规律性．从实际意义而言，概率论与数理统计是以随机现象为研究对象，以统计规律性为研究内容的数学科目．

人类对随机现象的注意由来已久．16 世纪，在对博彩游戏中一些数学问题的研究过程中，概率论诞生了．几百年来，通过几代数学家的努力，概率论的基本概念及理论业已建立．伴随着数学基础理论的完善，以及 20 世纪初公理化浪潮的掀起，20 世纪 30 年代初，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出了公理化的概率论．公理化概率论的建立为概率论的发展奠定了坚实的基础．几乎与此同时，基于概率论的数理统计思想逐渐被广大的数理统计学家所接受．

二战以后，概率论与数理统计获得了长足的发展．这种发展不仅表现在其自身理论方面，而且还表现在应用方面．当前，概率论与数理统计在各行各业中的应用数不胜数．特别是在当前一些最具活力的行业中，如信息、金融、交通、制造业、农业、社会服务业等，概率论与数理统计的应用对它们的发展起到了推动性的作用．

第 1 章　概率论基础知识

1.1　样本空间，随机事件

1.1.1　随机试验

随机现象广泛存在于自然界与人类社会，对随机现象的观测与考察称为随机试验. 由于本门课程立足对随机现象的研究，所以把随机试验又简称为试验(experiment). 随机试验具备以下三个性质：

- 试验能在相同条件下重复进行；
- 试验前明了所有可能出现的结果；
- 试验前不能确切地预料具体出现哪个试验结果.

以掷一枚硬币观察国徽一面及币值一面出现的情况为例. 由于硬币不变，所以掷硬币的行为可以在相同的情况下重复实施. 在掷硬币之前我们知道出现的结果只能是国徽一面或币值一面，但具体是哪一面出现不能确切地预料. 可见，掷一枚硬币观测其两面出现的情况是一个随机试验. 诸如此类的试验有很多，如

$E1$：掷一枚骰子观察其各点出现的情况；

$E2$：在单位时间内观测一高速公路上汽车的流量；

$E3$：从一批灯泡中任意抽取一只测量其寿命；

$E4$：掷三枚硬币考察其各面出现的情况；

$E5$：观察每一天某种外汇的买入价及其卖出价.

1.1.2　样本空间

定义 1.1.1　设 E 是一试验，其所有可能出现的结果构成的集合称为试验 E 的样本空间. 样本空间中的元素称为样本点.

通常人们用 S 记样本空间. 以掷一枚硬币观测其两面出现的情况为例. 若以 H 表示出现国徽一面，以 T 表示出现币值一面，则相应的样本空间为 $S=\{H,T\}$. 以下列出 $E1\sim E5$ 相应的样本空间.

在 $E1$ 中，以"1"表示"掷得 1 点"这一事件，"2"表示"掷得 2 点"这一事件，依此类推，则 $E1$ 的样本空间可写作：

$$S1 = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

类似地，$E2\sim E5$ 的样本空间分别可写作

$$S2 = \{0,1,2,\cdots\},$$

$$S3 = \{t \mid t \geqslant 0\},$$

其中"t"表示"所抽取的灯泡寿命为 t 小时",

$$S4 = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\},$$

其中 H 表示"国徽面向上",T 表示"币值面向上",

$$S5 = \{(x,y) \mid x,y \geqslant 0, x \in Q, y \in Z\},$$

其中 x 表示"某种外汇的买入价为 x", y 表示"某种外汇的卖出价为 y",Q 表示买入价的可能取值范围,Z 表示卖出价的可能取值范围.

值得注意的是,对一个随机现象观测的方式,目的有所不同时,相应的样本空间也可能有所不同.例如,若在 $E4$ 中考察的是国徽一面出现次数时,样本空间可表示为 $S=\{0,1,2,3\}$.

1.1.3 随机事件

在对随机现象的考察过程中,人们往往对试验中可能出现的某种或几种情况特别感兴趣.我们把试验中可能出现的一种情况就叫做一个事件,用一个大写英文字母表示.如"甲、乙、丙三人掷一枚骰子赌输赢,三人约定,掷出 1,2 点甲赢,掷出 3,4 点乙赢,掷出 5,6 点丙赢".此时样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.可设 A 表示"甲赢".易见,"甲赢"这个事件与样本空间的子集 $A=\{1,2\}$是对应的.同样可以把集合 $B=\{3,4\}$,$C=\{5,6\}$分别与事件 B:"乙赢"、事件 C:"丙赢"等同起来.这种想法推而广之,从而有如下定义.

定义 1.1.2 设 S 是一样本空间,S 的满足一定条件的子集称为随机事件,简称事件.由一个样本点组成的单点集称为一个基本事件.

由于定义中所述的"一定条件"较为宽松,人们在实际中考察的对象大多都能满足,这里就不再多说了.以下约定在一次试验中事件 A 发生是指A 中的样本点出现.

样本空间 S 是其自身的子集,它也是事件.由于在每一次试验中均有 S 中的样本点出现,所以该事件每次试验均发生.为此,我们称 S 为必然事件.空集$\varnothing$也是事件,但每次试验中均无其中的样本点出现,所以称其为不可能事件.

例如,试验 $E1$ 中事件 A="掷出偶数点",若以"k"表示"掷出 k 点", $k=1,2,\cdots,6$,则 $A=\{2,4,6\}$.试验 $E2$ 中事件 B="单位时间车流量大于 500", 若以"m"表示"单位时间车流量为 m",则 $B=\{m \mid m>500,\ m\in \mathbf{Z}\}$.试验 $E4$ 中事件 C="掷出两个国徽面",若以"H"表示某次"掷出国徽面", "T"表示某次"掷出币值面",则 $C=\{HHT, HTH, THH\}$.

由上面的例子可以看出，事件可以用文字描述，也可以用样本空间的子集表示.后者更便于理论分析.

1.1.4 事件间的关系与运算

事件是样本空间的子集，所以事件间的关系与运算不外乎集合与集合间的关系与运算.考虑到相应的概念在概率论中的特殊含义，我们能够对这些关系与运算做概率论方面的解释.

1. 事件的包含

设 A,B 是事件.若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B.这个关系说明事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等.

2. 和事件

A,B 是事件.事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件.表明事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 k 个事件，则事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i=\{\omega\mid\exists\, i,1\leqslant i\leqslant k,\ \omega\in A_i\}$ 称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的和事件.

设 $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 是一列事件，则事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\{\omega\mid\exists\, i,\ i\in\mathbf{N},\omega\in A_i\}$ 称为这一列事件的和事件，或称其为这一列事件的可列和.

3. 积事件

A,B 是事件，事件 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件.积事件 $A\cap B$ 也可记为 AB，表示事件 A 与事件 B 同时发生.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 k 个事件，则事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i=\{\omega\mid\forall\, i,1\leqslant i\leqslant k,\omega\in A_i\}$ 称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的积事件.

设 $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 是一列事件，则事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\{\omega\mid\forall\, i,i\in\mathbf{N},\omega\in A_i\}$ 称为这一列事件的积事件，或称其为这一列事件的可列积.

4. 差事件

A,B 是事件.事件 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A,\omega\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.表示事件 A 发生，而事件 B 不发生.

5. 互斥的事件

A,B 是事件.若 A,B 的积事件是不可能事件,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容,或事件 A 与事件 B 互斥.两个事件互斥的关系表明,若两者中有一个发生,则另一事件必不发生.

6. 互逆的事件

A,B 是事件,S 是必然事件.若 A,B 的和事件是必然事件,A,B 的积事件是不可能事件,即 $A\cup B=S$,$AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件,或称事件 A 与事件 B 互为对立事件,此时记

$$\bar{A}=B,\qquad \bar{B}=A.$$

图 1.1 可直观地表示以上事件的关系.

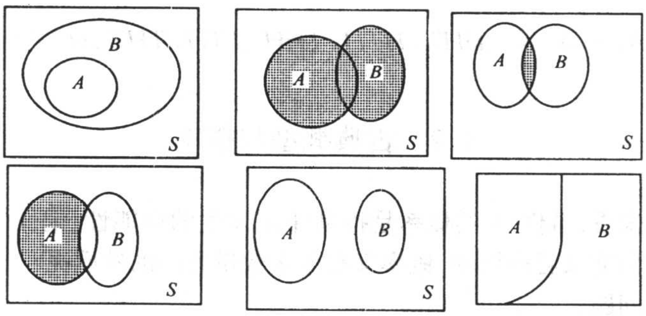

图 1.1 事件关系与运算

以下我们列出事件的运算律.

交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A.$$

结合律:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

分配律:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

德摩根(De Morgan)律:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

例 1.1.1　以 1.1 节中 $E3$ 为例. 设事件 $A_1=$“至少出现一个国徽面”,$A_2=$“出现三个相同的面”,则

$$A_1 = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT\},$$

$$A_2 = \{HHH, TTT\}.$$

依前面介绍的运算法则有

$$A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT\} = S,$$

$$A_1 \cap A_2 = \{HHH\},$$

$$A_1 - A_2 = \{HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT\}.$$

1.2　古典概型与概率

从直观上来看,事件 A 的概率是指事件 A 发生的可能性,记作 $P(A)$. 那么,如何从数学的角度来看待概率,概率又有什么数量方面的性质呢?

考虑下列问题:

抛一枚硬币,币值面向上的概率为多少?

掷一颗骰子,出现 6 点的概率为多少? 出现单数点的概率为多少?

受以上例子的启发,可以对一类特殊的随机试验定义概率,即概率的古典定义法.

1.2.1　概率的古典定义

首先,我们引入概率论早期的主要研究对象——古典概型.

设 E 是试验,S 是相应的样本空间,$\{e\}$是 S 中的基本事件. 若 S 是有限集,且所有基本事件出现的可能性均相等(公认),即

(1)　$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $n \in \mathbf{N}$,

(2)　$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\dfrac{1}{n}$,

则称这样的概率模型为古典概型,或等可能概型.

设事件 $A=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$, $k \leqslant n$. 以 $N(A)$记事件 A 中所含样本点个数

k,以 $N(S)$记样本空间 S 中样本点总数 n,则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点个数}}{S\text{ 中样本点总数}}=\frac{N(A)}{N(S)}.$$

显然,上述 $P(A)$具有如下性质:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(S)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) 有限可加性:设 $A_1,\cdots,A_n$ 是一列两两互不相容的事件,即

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则我们有

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

1.2.2 古典概型的例子

例 1.2.1 掷三枚硬币考察其各面出现的情况. 设 A =“至少出现一个国徽面 H”,B =“至多出现一个国徽面 H”,求 $P(A)$,$P(B)$.

解 样本空间 S 为

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,HTT,THT,TTT\}.$$

可见

$$A=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,HTT,THT\},$$

$$B=\{TTH,THT,HTT,TTT\},$$

$$N(A)=7,\quad N(B)=4,\quad N(S)=8,$$

所以

$$P(A)=7/8,\quad P(B)=1/2.$$

当样本空间中样本点个数较多时,企图通过穷举法列出样本空间及事件中所有样本点以求事件概率的想法就不太现实了. 此时可通过适当的形式先把试验的结果确定下来(这样做也就确定了样本空间),然后通过排列、组合等方法计算相应事件的概率.

例 1.2.2 盒中有 10 个球,其中 4 个白球,4 个黑球,2 个红球. 现从盒中随机取 3 个球,求:

(1)取到的球中恰好含有两个白球的概率;

(2)取到的球中至少含有一个白球的概率.

解　设 A =“取到的球中恰好含有两个白球”；B =“取到的球中至少含有一个白球”.

假想将球编号为 1,2,…,10,其中 1～4 号球是白球,5～8 号球是黑球,9～10 号球是红球.显然,取到每一号球的可能性是相同的,因而,试验为古典概型.试验的所有可能结果数是从 10 个元素中任取 3 个元素的所有取法数,故有

$$N(S)=C_{10}^{3}.$$

事件 A 表示从 1～4 号球中取两个,再从 5～10 号球中取一个的所有取法,故

$$N(A)=C_4^2C_6^1,$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}.$$

事件 B 包括 3 种情况:恰好包含一只白球,恰好包含两只白球,恰好包含三只白球,故

$$N(B)=C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3,$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}.$$

例 1.2.3　将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中,试求每盒中至多有一个球的概率(假设每个盒子的容量无限).

解　设事件 A =“每盒中至多有一个球”.

假想每个球、盒子均已编号.按球号顺序记录各球所在的盒子号,则样本空间为

$$S=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid 1\leqslant a_i\leqslant N,1\leqslant i\leqslant n\}.$$

由于每个球可以随机地放入任何一个盒子中,且每个盒子的容量无限,所以

$$N(S)=\underbrace{N\times N\times\cdots\times N}_{n}=N^n.$$

A 事件发生意味着每个球各占一个盒子,则

$$N(A)=A_N^n\equiv\frac{N!}{(N-n)!}$$

式中 A_N^n 表示从 N 个元素中取 n 个的排列数. 故而

$$P(A)=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

若把一年的 365 天看作是 365 个盒子,而把一个单位中每人的生日看作是一个球,且假定每人是等可能地出生在 365 天中的任意一天. 当该单位的人数 n 超过 365 时,必有两人生日相同. 当该单位的人数 n 不超过 365 时,其中没有人同一天出生的概率为 $\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$;相反,至少存在两人生日相同的概率为 $1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$. 表 1.1 列出不同的 n 对应的至少存在两人生日相同的概率.

表 1.1

n	20	30	40	50	64	100
p	0.4	0.7	0.89	0.97	0.99	0.999999

从表 1.1 可以看出,事实上不需要很大的 n 就可以使至少存在两人生日相同的概率非常接近于 1.

1.3 频率与概率

1.3.1 频率

定义 1.3.1 设 E 是一个试验,A 是一个随机事件. 将 E 在相同条件下重复 n 次,以 n_A 记事件 A 发生的次数,事件 A 发生的频率为

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n},$$

其中 n_A 称为事件 A 发生的频数.

由频率的定义容易看出其具有如下的性质:

(1) 对任意事件 A,$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) S 是必然事件,则 $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 k 个两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

频率的这三条性质依次被称为非负性、归一性和有限可加性. 就频率的意义而言,频率在某种程度上是可以反映出一个事件发生的可能性大小的. 那么,是否可以把频率就当作概率呢? 答案是否定的. 经验告诉我们,频率会随试验次数 n 的变化而发生波动. 即使是在试验次数相同的条件下,两组试验得到的频率也不尽相同. 频率的随机波动使得它失去了作为可能性大小度量的客观性. 然而经验还告诉我们,随着试验次数的增加,频率的随机波动性有逐渐减小的趋势. 也就是说,当试

验次数趋于无穷大时频率将趋于一个稳定的值.可以想像,这个稳定的值就是频率的波动中心.波动中心的客观性使得人们非常自然地把它同相应事件发生的概率相联系,从而就将频率所趋于的稳定值看作事件 A 发生的概率.

1.3.2　公理化的概率定义

由前面的内容我们可以看出,一个事件发生的概率是一个实数.考虑到样本空间中每一个事件都有一个概率,故可以把概率看作是以事件为自变量的集合函数.另一方面,不论是概率的古典定义还是作为频率稳定值的定义,概率都具有非负性、归一性和有限可加性这三条基本性质.若把这几点作为概率的内在规律性,便有下面公理化的概率定义.

定义 1.3.2　E 是一个试验,S 是相应的样本空间.若集合函数 $P(\cdot)$满足

(1) 非负性　对任意事件 A,$P(A)\geqslant 0$,

(2) 归一性　$P(S)=1$,

(3) 可列可加性　设$\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$是一列两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i),$$

则称 $P(\cdot)$是定义在 S 上的一个概率.

1.3.3　概率运算的性质

(1)不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

证　因 $S=S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由概率的可列可加性可得

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots.$$

而 $P(\varnothing)\geqslant 0$,故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 k 个两两互不相容的事件,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i).$$

证　设 $A_n=\varnothing,n>k$,容易证明$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$是一列两两互不相容的事件.由概率的可列可加性得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i).$$

当 $n>k$ 时,$A_n=\varnothing,P(\varnothing)=0$,从而 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$,$\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)=$