普通高等教育"十五"国家级规划教材

微积分

第二版 上册

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

微　积　分

第二版　上册

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，在同济大学应用数学系编《微积分》的基础上修订而成 这次修订的宗旨是在保持改革特色的前提下，使本书内容更加贴近当前的教学实际，便于教学．对部分章节的内容作了重新组合、增删和改写，参照当前通行的教学基本要求，适当调整了部分内容的要求；对习题，特别是每章的总习题做了较大的调整，充实了概念题和基本题，删去了少数技巧要求过高的题，突出了总习题的复习功能；数学实验是本书的特色之一，将部分实验与教学内容更加有机地结合起来，同时降低实验要求并删去了几个难度较大的实验，希望使用起来更加方便和有效．

全书分上、下两册出版 上册内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程 下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数．书末附有习题答案与提示．

本书保持了第一版结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、例题较多的特点，便于在教学改革中使用 本书可作为工科和其他非数学类专业的教材．

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)/同济大学应用数学系编．—2 版．—北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7-04-012178-6

Ⅰ.微… Ⅱ.同… Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045288 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	潮河印业有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1999 年 9 月第 1 版
印　　张	23.75		2003 年 8 月 2 版
字　　数	440 000	印　　次	2003 年 8 月第 1 次印刷
		定　　价	24.90 元

第二版前言

本书于1999年9月出版后，经三年多的使用和广泛听取有关专家和教师的意见，决定进行一次修订.

这次修订的宗旨是在保持第一版改革特色的前提下，使教材更加贴近当前的教学实际，便于教学. 为此对部分章节的内容作了重新组合、增删和改写，参照当前通行的教学基本要求，适当调整了部分内容的要求. 对习题，特别是每章的总习题，充实了概念题和基本题，删去了少数技巧要求过高的题，突出总习题的复习功能. 书中的数学实验是本书的特色之一，经几年的教学实践，使我们对如何把握这部分内容有了更多的认识，因此对这部分内容的改动成为这次修订的重要方面. 我们将少数实验内容充实到正文中，使之与教学内容更加有机地结合起来，同时降低实验要求并删去了几个难度较大的实验，希望使用起来更加方便和有效.

我们衷心感谢很多专家和同仁对教材提出的宝贵意见，他们的认真使用和无私指教是这本教材得以逐步改进的源泉.

本次修订由郭镜明、应明、朱晓平、邵国梁等完成. 对书中存在的问题，欢迎广大专家，同仁和读者批评指正.

编者

2003年1月

第一版前言

本书是按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本微积分教材．作为改革教材诸多模式中的一种，本书遵循的编写原则是：在教学内容的深广度方面与现行的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》大体相当，渗透现代数学思想，加强应用能力的培养，尝试微积分内容与现代计算机功能的有机结合，以适应新世纪对工程技术人才的数学素质的培养要求．围绕这些原则，我们致力于把本书写成既能保持传统教材的优点（特别是作为国家优秀教学成果的同济大学编《高等数学》的优点），又努力贯彻改革精神的微积分新教材．我们希望这本教材能在一定程度上满足一般工科院校的多数专业对高等数学改革教材的需要．

在本书的编写过程中，我们作了以下一些改革的尝试：

(1) 努力突出微积分的基本思想和基本方法，以便学生在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握微积分的思想方法．比如本书加强了对极限作为微积分基本方法的论述；在微积分基本定理的证明中，增加了体现积分与微分内在联系的证明方法；在微分和级数部分，注意从分析、图形和数值三方面的结合上，努力突出函数逼近的思想；通过向量方法介绍第二类曲线积分和曲面积分，两类积分的联系，更好地展示格林公式、高斯公式、斯托克斯公式与牛顿－莱布尼茨公式的内在一致性等等，就都是为了这个目的而采取的新的处理方法．本书更加注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解和印象．

(2) 按照适当介绍和循序渐进的原则，在教材中渗透现代数学思想，促进微积分与线性代数及其他数学课程的结合，为学生进一步学习现代数学知识提供一些“接口”．但在这样做时，注意教材的可接受性，避免使内容过深而脱离一般工科院校学生的实际．比如上册中从一般的集合、映射引入函数概念；结合零点定理的论证介绍用二分法逼近根的构造性证明思想；结合微分方程介绍数学建模，等等，基本上都是结合实际例子仅作初浅说明．而在下册中则在体系性和抽象性方面适当提高要求，比如对向量的处理突出了坐标定义；在引进多元函数概念时介绍了 $\mathbf{R}^n$ 中元素的线性运算和距离概念，并在与具体的几何向量的对比中引进一般函数空间中的距离结构；对多元微积分在采取传统处

理方式的同时，注意与线性代数知识适当结合（但不以学过线性代数作为前提），使多元微积分中某些概念的表达方式与一元微积分中的相应概念取得一致，并变得更加简洁；我们还在傅里叶级数部分简单介绍了均方逼近的概念．在本书中，还适当介绍和使用了一些数学记号和逻辑符号，目的是培养学生将数学语言和自然语言互相转化的能力．

(3) 鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，我们把数学软件的使用融合进教材，尝试将微积分的教学与计算机功能的利用有机结合起来．本书上、下册共编进了 14 个数学实验．这些实验与专门的数学实验教材中的实验课题有较大区别：一是这些实验题紧密结合教材内容，是学生学习微积分的组成部分和延伸补充；二是内容简单且比较有趣，能激发学生的兴趣，又容易理解和上手，不需占用很多课内时间．14 个实验大致有两种类型．第一类的内容本身就是微积分的传统教学内容．我们把函数作图、方程近似解、数值积分、最小二乘法等内容从正文中剥离出来，放入实验中．既介绍了有关理论，又通过编写简单程序在计算机上进行绘图和数值计算，在演示和实验过程中完成这些内容的教学．第二类的内容是借助数学软件的帮助，让学生利用微积分知识，自己动手解决一些实际问题，以加深对所学过的知识的理解．比如函数逼近、飞机安全降落曲线的确定、最小光照点的计算、导弹追踪轨线的模拟、等高线和积分曲线、一元函数极值与多元函数极值的比较等实验就是为此目的而编写的．我们对所有实验都写出了详细的步骤和有关命令，打印出相应的结果．这些实验都依靠现已广泛使用的数学软件 Mathematica 的支持．有关此软件的简要介绍及常用命令见附录一．在每个实验后面都配了相应的实验习题，供读者练习．

根据我们初步试点的结果看，这样做有利于提高学生学习的主动性，改进教学效果，并能带动教学方法和教学手段的改革．

(4) 较多地增加了应用题的数量，特别是采用了一些来自客观世界的真实问题作为例题和习题．这些问题主要来自自然科学、工程技术领域和日常生活，少数来自生物学和经济学．其中有些很生动的实际问题，在引入数学软件之前，由于计算的困难难以编进教材，但现在有了计算机的帮助，读者就能从图形和数值的结合上进行分析、计算并方便地得出结果（参见上册总习题三的第 24、25 题，总习题四的第 16 题，数学实验 4、6、8 中的课题；下册总习题九的第 17 题等）．希望这些实际问题的编入有助于增强应用题的真实感，提高学生的学习兴趣和解决实际问题的能力．

(5) 为了控制课时数，并使教材更适合工科和其它非数学类专业学生的特点，书中对函数概念、函数作图、积分法、弧微分、元素法、向量代数、第二类曲线和曲面积分的计算等内容，对某些定理的证明，作了简化或新的处理．

有的内容用楷体字印刷，或在标题上加了 * 号，表示这些内容可供学生阅读自学．希望这样的处理能给教师留下较大的机动余地，使他们可根据学生的实际情况和具体的教学时数，作出灵活安排．

（6）为了帮助学生从图形和数值的结合上学好微积分，本书提供了更多的函数图形．书中的许多具体函数的图形是在计算机上通过 Mathematica 描绘出来的．由于使用了数学软件，我们有可能在书中向读者展示更多、更复杂的图形（特别如一些隐函数的图形、积分曲线和空间立体图形），这对他们的学习可能是有好处的，也能为教材增添一些现代气息．

此外，在本书的安排上，为了配合某些专业的物理课教学的需要，我们把微分方程一章放在上册．考虑到学生在中学已经学过了较多的集合和函数的知识，为避免不必要的重复，本书把传统教材中的集合和函数这一章作了精简和改写，作为全书的预备知识．教师可根据学生实际情况灵活处理，以节省课时．

我们想着重说明的一点是，在作出所有这些改革尝试时，我们注意处理改革与继承的关系，使长期形成的传统教材的优点能得到保持和发扬．本教材是在同济大学编《高等数学》的基础上编写出来的，原教材的一些优点，诸如深浅恰当，结构严谨，文字通畅，叙述详尽，例题较多，便于自学等，我们都注意吸收进来，两书的内容体系也比较接近．对于目前采用同济大学编《高等数学》作为教材的学校来说，使用本书应是比较方便的．

本书中的定理、推论和某些重要结论用黑体字排印；基本概念和术语在下面画线；而对一些重要公式、重要方法和归纳性评述则在四周加框，以便学生查阅．本书还在每章后面配置了总习题，其中的题目包括综合题、难度较大的题和少数上机计算的题（在题号的前面用符号  表示）．教师可根据学生实际情况选用．

本书分上、下两册，上册为一元微积分和微分方程，下册为多元微积分和无穷级数．

本书自 1996 年初开始编写．我们作了不少调查研究，参阅了国内外一些改革教材，边写边试点边修改，至今已在 200 多位学生中试用过两次．在教学过程中还进行了多媒体演示和学生上机实验等教学手段的试点．初步试验的结果较好，受到学生的欢迎．本书内容可在 160 课时内教完（包括习题课），另外还加上 15～20 课时的学生课内上机时间．上机时间可视学校的硬件设备和学生情况灵活安排．现在很多大学都在一年级开设了计算机文化课，这对在微积分课程中开展数学实验是十分有利的．

本书的编写是在同济大学应用数学系的领导和很多老师的支持下完成的．数学系成立了专门的教改小组，邵嘉裕教授、邱伯驺教授和查建国教授直接参

与了小组的调研工作和多次讨论. 具体执笔编写的有郭镜明、应明、邵国梁和朱晓平，黄珏教授也参加了上册部分初稿的编写工作. 同济大学编《高等数学》的编者邱伯驺教授和骆承钦教授对本教材的编写提出了很多具体的意见和建议. 我们要特别感谢教材评审组的王绵森教授、赵中时教授和谢国瑞教授，他们对书稿提出的宝贵意见和建议被充分地吸收进了本书，对提高本书的质量发挥了重要的作用. 感谢高等教育出版社的文小西编审，他的认真工作和热情帮助使本书得以尽早出版. 我们还要感谢廖洒丽小姐，她为本书几次书稿的打印付出了辛勤的劳动.

本教材的书稿虽经试用和修改，但由于编者水平所限，加上任务本身的难度大，时间又紧，书中的不足和考虑不周之处肯定很多，错误也在所难免，我们极望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来.

编者

1999 年 4 月

目　　录

预 备 知 识

一、集　　合

1. 集合的概念

在数学中，我们把指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合（或简称集（set））. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 一个集合，若其元素的个数是有限的，则称作有限集，否则就称作无限集. 习惯上，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 全体非负整数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{0,1-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}.$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p、q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}.$$

有时我们在表示数集的字母的右上方加上“$*$”、“$+$”、“$-$”等上标，来表示该数集的几个特定子集. 以实数集为例，$\mathbf{R}^*$ 表示排除了数 0 的实数集；$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数之集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数之集. 其他数集的情况类似，不再赘述.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或者称 A 包含于 B，或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x^2+1=0\}$ 就是一个空集. 规定空集是任何集合的子集.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$ 或 $B=A$.

2. 集合的运算

设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$；由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$；由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A\setminus B$. 有时我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体叫作全集，记作 I，并把差集 $I\setminus A$ 特别称为 A 的余集或补集，记作 A^c. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的余集

$$A^c=\{x\mid x<0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积. 设 A、B 是任意两个集合，则 A 与 B 的直积，记作 $A\times B$，定义为如下的由有序对 (a,b) 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$，实数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间（open interval）并记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}^{①}.$$

a 和 b 称为区间的端点，它们均不属于 (a,b). 类似地可定义以 a、b 为端点的闭区间（closed interval）、半开区间等. 它们的记号和定义如下所列：

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，

半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间（或有界区间），它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示，如图 1(a)、(b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b). 此外还有无限区间（或无穷区间），引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大）后，则可用类似的记号表示无限区间，例如

① 记号 (a,b) 表示开区间还表示有序对，这从上下文可以明白，一般不会产生异义

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1（c）、（d）所示.

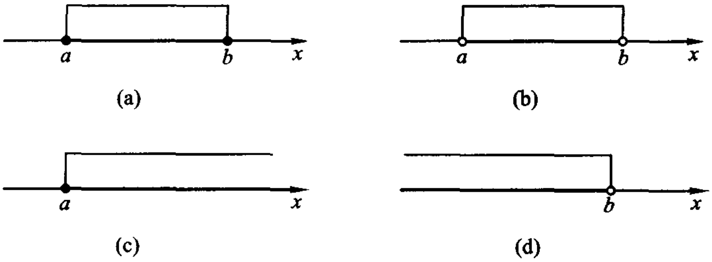

图 1

邻域（neighborhood）是一种常用的集合. 设 a、δ 是实数且 $\delta>0$，则定义点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，为下列集合：

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

可见 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径（图 2）. 如果把邻域的中心去掉，所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

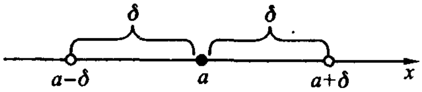

图 2

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域，例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴，并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$.

二、映　射

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 T，使得 X 中的每个元素

x 按法则 T 在 Y 中有惟一的元素 y 与之对应，那么称 T 为从 X 到 Y 的映射(mapping)，记作

$$T: X \to Y,$$

元素 y 称为元素 x（在映射 T 下）的像，并记作 T（x），即

$$y = T(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 T 下）的一个原像.

集合 X 称为映射 T 的定义域（domain），T 的定义域常记作 $\mathscr{D}$（T）. X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的值域（range），T 的值域常记作 $\mathscr{R}$（T）. T 的值域有时也称为集合 X（在映射 T 下）的像并记作 T（X），即

$$\mathscr{R}(T) = T(X) = \{T(x) \mid x \in X\}.$$

根据集合 X、Y 的不同情况，在不同的数学分支中，术语“映射”有着不同的惯用名称，例如“函数”、“泛函”、“变换”、“算子”等等. 如果 X 是非空集合，Y 是一个数集（实数集或复数集），那么从 X 到 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数. 我们在中学数学中所接触的函数实际是实数集（或其子集）到实数集的映射. 例如，

$$\text{映射 } f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = f(x) = \sin x,$$

即为我们所熟悉的正弦函数.

注意，在说明一个具体的映射时，不仅要指出它是从哪个集合到哪个集合的映射，还要指出其具体的对应规则；但使用什么字母来表示所讨论的映射、集合和元素，是可以根据需要（当然也要注意习惯用法）自由选取的.

我们指出，在讨论函数时，为方便起见，常用 $y = f(x)$ 或 $f(x)$ 来表示函数 f，比如正弦函数可表示为 $y=\sin x$，$x \in \mathbf{R}$.

2. 几类重要映射

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 T（X）$= Y$，即 Y 中任一元素均是 X 中某元素的像，则称 T 为 X 到 Y 的满射；若对任意的 x_1、$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$，则称 T 为 X 到 Y 的单射；若 T 既是满射又是单射，则称 T 为 X 到 Y 的一一映射，或称 T 为 X 与 Y 之间的一一对应.

例 1 设 $X_1 = (-\infty, +\infty), X_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], Y_1 = (-\infty, +\infty), Y_2 = [-1,1]$. 考虑 $f_1: X_1 \to Y_1, f_2: X_1 \to Y_2, f_3: X_2 \to Y_1, f_4: X_2 \to Y_2$，其中 $f_i(i = 1,2,3,4)$ 均为如下的对应规则：对定义域内的任一 $x, f_i(x) = \sin x$. 易知 f_1 是 X_1 到 Y_1 的映射，但既非满射，又非单射；f_2 是 X_1 到 Y_2 的满射，但非单射；f_3 是 X_2 到 Y_1 的单射，但非满射；f_4 是 X_2 到 Y_2 的满射，又是单射，即为一一映射.

3. 逆映射与复合映射

逆映射 设映射 T 为 X 到 Y 的一一映射，则由定义，对每个 $y\in Y$，有惟一的 $x\in X$ 适合 $T(x)=y$，于是我们可得到一个从 Y 到 X 的映射，它将每个 $y\in Y$ 映为 X 中的元素 x，这里的 x 满足 $T(x)=y$. 我们把这个映射称为 T 的逆映射，记作 T^{-1}. 即，T^{-1}为从 Y 到 X 的映射，对每个 $y\in Y$，如果 $T(x)=y$,则 $T^{-1}(y)=x$.

注意，只有一一映射才存在逆映射，因此也把一一映射称为可逆映射. 比如在例 1 中，只有 f_4 才存在逆映射 f_4^{-1}，f_4^{-1} 即为大家熟悉的反正弦函数：$f_4^{-1}(x)=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

复合映射 设有映射 $T_1:X\to Y_1$，$T_2:Y_2\to Z$，且 $T_1(X)\subset Y_2$，由 T_1 和 T_2 可确定从 X 到 Z 的一个对应规则，它将每个元素 $x\in X$，映为 Z 中的元素 $z=T_2[T_1(x)]$，显然这个对应规则是从 X 到 Z 的一个映射，我们把这个映射称为由 T_1、T_2 构成的复合映射，并记作 $T_2\circ T_1$，即

$$T_2\circ T_1:X\to Z,\text{对每个元素 }x\in X,(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)].$$

例如，设有映射 $T_1:\mathbf{R}\to[-1,1],u=T_1(x)=\sin x$,

和映射 $T_2:[-1,1]\to[0,1],y=T_2(u)=u^2$,

则可构成复合映射 $T_2\circ T_1:\mathbf{R}\to[0,1]$，对 $\mathbf{R}$ 中的任一元素 x，

$$(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)]=T_2(\sin x)=(\sin x)^2.$$

三、一元函数

1. 概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数，简称为函数（function），通常简记为 $y=f(x),x\in D$. $x(x\in D)$ 称为函数的自变量，$y(y\in f(D))$ 称为函数的因变量，习惯上也称 y 为 x 的函数. 前面定义的与映射有关的一些概念，如定义域、值域等，也适用于函数. 对于函数 $y=f(x),x\in D$，我们把 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形（或图像）（graph）.

表示函数的符号是任意选取的，除了常用的 f 外，还可以用其他的英文或希腊字母，如“g”、“F”、“φ”、“Φ”等等. 如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数，则必须用不同的记号分别表示这些函数，以示区别.

在一些实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s. 如果开始下落的时