



高等院校电子科学与技术专业系列教材

光学电磁理论

陈 军 编著



科学出版社
www.sciencep.com

高等院校电子科学与技术专业系列教材

光学电磁理论

陈 军 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以电磁理论为基础,将电磁理论与经典光学理论及现代光电信息技术相结合.从麦克斯韦方程组出发,对电磁波特别是针对光波段在各种媒介,包括在分层介质、多层膜、金属及有损介质、金属波导、介质波导及各类光纤、晶体及其他各向异性介质中的传播特性及部分非线性光学效应进行了系统而深入的分析,并对现代光学及电信息技术中的典型应用实例进行了分析.书后附“光学电磁理论教学软件”光盘一张.

本书可作为高等院校光学工程、光电信息工程专业以及相关专业硕士研究生学位课教材和相关专业选修课教材,并可供从事光学、光电子、光通信等专业的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

光学电磁理论/陈军编著. —北京:科学出版社,2005

(高等院校电子科学与技术专业系列教材)

ISBN 7-03-015891-1

I. 光… II. 陈… III. 光-电磁理论-高等学校-教材 IV. O431.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077035 号

责任编辑:马长芳 贾瑞娜/责任校对:李奕莹

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年9月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005年9月第一次印刷 印张: 17

印数: 1—3 000 字数: 326 000

定价: 32.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

《高等院校电子科学与技术专业系列教材》编委会

主 编	姚建铨	天津大学
副主编	金亚秋	复旦大学
	陈治明	西安理工大学
	吕志伟	哈尔滨工业大学

委 员 (按姓氏音序排列)

	曹全喜	西安电子科技大学
	崔一平	东南大学
	傅兴华	贵州大学
	郭从良	中国科技大学
	郭树旭	吉林大学
	黄卡玛	四川大学
	金伟琪	北京理工大学
	刘纯亮	西安交通大学
	刘 旭	浙江大学
	罗淑云	清华大学
	马长芳	科学出版社
	毛军发	上海交通大学
	饶云江	重庆大学
	张怀武	电子科技大学
	张在宣	中国计量学院
	周乐柱	北京大学
	邹雪城	华中科技大学
秘 书	资丽芳	科学出版社

序 言

21 世纪,随着现代科学技术的飞速发展,人类历史即将进入一个崭新的时代——信息时代,其鲜明的时代特征是,支撑这个时代的诸如能源、交通、材料和信息等基础产业均将得到高度发展,并能充分满足社会发展和人民生活的多方面需求。作为信息科学的基础,微电子技术和光电子技术同属于教育部本科专业目录中的一级学科“电子科学与技术”。微电子技术伴随着计算机技术、数字技术、移动通信技术、多媒体技术和网络技术的出现得到了迅猛的发展,从初期的小规模集成电路(SSI)发展到今天的巨大规模集成电路(GSI),成为使人类社会进入信息化时代的先导技术。20 世纪 60 年代初出现的激光和激光技术以其强大的生命力推动着光电子技术及其相关产业的发展,光电子技术集中了固体物理、波导光学、材料科学、半导体科学技术和信息科学技术的研究成就,成为具有强烈应用背景的新兴交叉学科,至今光电子技术已经应用于工业、通信、信息处理、检测、医疗卫生、军事、文化教育、科学研究和社会发展等各个领域。可以预言,光电子技术将继续微电子技术之后再次推动人类科学技术的革命和进步。因此,本世纪将是微电子和光电子共同发挥越来越重要作用的时代,是电子科学与技术飞速发展的时代。

电子科学与技术对于国家经济发展、科技进步和国防建设都具有重要的战略意义。今天,面对电子科学技术的飞速发展,世界上发达国家像美国、德国、日本、英国、法国等都竞相将微电子技术和光电子技术列入国家发展计划。我国对微电子技术和光电子技术的研究也给予了高度重视。在全国电子科学技术的科研、教学、生产和使用单位的共同努力下,我国已经形成了门类齐全、水平先进、应用广泛的微电子和光电子技术的科学研究领域,并在产业化方面形成了一定规模,取得了可喜的进步,为我国科学技术、国民经济和国防建设做出了积极贡献,在国际上也争得了一席之地。但是我们应该清醒地看到,在电子科学与技术领域,我国与世界先进水平仍有不小的差距,尤其在微电子技术方面的差距更大。这既有历史、体制、技术、工艺和资金方面的原因,也有各个层次所需专业人才短缺的原因。

为了我国电子科学与技术事业的可持续发展和抢占该领域中高新技术的制高点,就必须统筹教育、科研、开发、人才、资金和市场等各种资源和要素,其中人才培养是极其重要的一环。根据教育部加强高等学校本科教育的有关精神,电子科学与技术教学指导委员会和科学出版社,经过广泛而深入的调研,组织出版了这套电子科学与技术本科专业系列教材。

本系列教材具有以下特色:

1. 多层次. 考虑到多层面的需求(普通院校、重点院校或研究型大学、应用型大学),根据不同的层次,有针对性地编写不同的教材,同层次的教材也可能出版多种面向的教材.

2. 延续传统、更新内容,基础精深、专业宽新. 教材编写在准确诠释基本概念、基本理论的同时,注重反映该领域的最新成果和发展方向,真正使教材能够达到培养“厚基础、宽口径、会设计、可操作、能发展”人才的目的.

3. 拓宽专业基础,加强实践教学. 适当拓宽专业基础知识的范围,以增强培养人才的适应性;注重实践环节的设置,以促进學生实际动手能力的培育.

4. 适应教学计划,考虑自学需要. 教材的编写完全按照教学指导委员会最新的课程设置的课程要求的指示精神,同时给学生留有更大的选择空间,以利于学生的个性发展和创新能力的培养.

5. 立体化. 教材的编写是立体的,包括主教材、学习辅导书、教师参考书和多媒体课件等等.

本系列教材的编写集中了全国高校的优势资源,突出了多层次与适应性、综合性与多样性、前沿性与先进性、理论与实践的结合. 在教材的组织和出版过程中得到了相关学校教务处及学院的帮助,在此表示衷心的感谢.

根据电子科学与技术专业发展战略的要求,我们将对这套系列教材不断更新,以保持教材的先进性和适用性. 热忱欢迎全国同行以及关注电子科学与技术领域教育及发展前景的广大有识之士对我们的工作提出宝贵意见和建议.

教育部“电子科学与技术”教学指导委员会主任
中国科学院院士,天津大学教授

姚建铨

前 言

21 世纪属于信息时代。信息学科与信息产业的迅猛发展促使传统的光学仪器学科向光电信息学科扩展。现代光电信息学科及其产业的发展要求新一代科学研究与工程技术人员具有扎实的电磁理论基础,具有应用电磁理论来解决光电信息学科及现代光学中各种问题的能力,成为知识结构新和创新精神强的高层次人才。本书将电磁理论与传统的经典光学及现代光电信息技术相结合,力求形成理工结合、经典理论与现代学科紧密结合的新体系。

本书从电磁场理论出发,用麦克斯韦方程组对不同介质以及不同边界条件下的电子波(光波)求解,对电磁波在各种媒介(包括在分层介质、多层膜、金属及有损介质、金属波导、介质波导)及各类光纤(包括阶跃及渐变折射率光纤、变折射率介质、晶体及其他各向异性介质)中的传播特性及部分非线性光学效应进行了系统而深入的分析,并对现代光电信息技术中的典型应用实例进行分析。

希望读者通过对本书的学习,达到如下目的:

- 1) 掌握电磁场理论的基本知识,学习在不同边界条件下求解麦克斯韦方程组的基本方法。
- 2) 利用电磁场理论分析、求解光学中的基本问题。
- 3) 利用电磁场理论分析、求解现代光学特别是前沿学科中出现的光学现象及应用问题。

本书作者特别希望通过针对各部分理论与现代光电信息技术中的许多典型应用实例以及相关技术相结合,进行深入的理论分析,使得教材内容更加生动与充实,也使读者对相应的理论有更深入的理解,并更能引起读者的兴趣。本书在内容上涉及电动力学、工程电磁学、物理光学、波导及光纤、晶体及非线性光学等多内容,较为深入地将电磁理论与现代光学结合起来,用电磁理论对现代光学及在光电信息学科中的基础知识及出现的新现象、新问题进行求解与分析。作者希望通过这样一种思路与方法,使电磁理论与光学、光学工程、光电信息技术等相关方面相结合,力求该教材在内容与体系上有新的突破。

本书是在作者对浙江大学光电工程系的研究生学位课程“光学电磁理论”进行了十余年教学以及对教材做多次修改之后写成的。从历届我系毕业的研究生反馈的信息获知,这类书籍在他们走上工作岗位以后仍然起着很好的参考书作用。特别是如果这些研究生曾经用过此书上课,查阅此书会使他们更感到熟悉、方便和快捷,可以借助于此书的许多内容及解法思路,创造出适合于其研究与工作实践的方

法,收到很好的效果.

此书也可作为从事光学、光电子、光通信等专业技术人员的参考书籍. 经过 5 年的电化教学实践,作者编制的课堂用教学软件取得了比较好的教学效果,这一教学软件与本书配套出版,以便于现代电化教学及远程教学. 对于本书中可能有的错误与整体结构的不足,作者十分诚恳希望读者能及时指出并告知,以便使本书得以不断地修正与提高.

(E-mail: chenjun1@zju. edu. cn)

作 者

2005 年 6 月 26 日

于浙江大学求是园

目 录

序言

前言

1 电磁场理论基础及麦克斯韦方程组	1
1.1 场论基础	1
1.2 静电场、静磁场基本定律	6
1.3 时变电磁场	10
1.4 真空中的麦克斯韦方程组	12
1.5 介质中的麦克斯韦方程组	13
1.6 电磁边界条件	20
1.7 无源波动方程	24
1.8 有源波动方程*	27
1.9 电磁场的能量	35
1.10 麦克斯韦方程组的完备性、对偶性*	38
2 电磁波在无限大均匀介质中的传播	41
2.1 无限大均匀介质中的平面波解	41
2.2 无限大均匀介质中的球面波解	42
2.3 无限大均匀介质中柱坐标系下的高斯光束基模解	43
2.4 单色平面波的基本特性	46
2.5 平面电磁波的能量和能流密度	48
2.6 准单色光波	52
2.7 任意简谐波及相速度	56
2.8 光波的偏振	57
3 电磁波在分层介质中的传播	69
3.1 平面电磁波两介质界面上的反射和折射	69
3.2 全反射、倏逝波	74
3.3 古斯-汉森位移	84
3.4 电磁波在分层介质上的反射和透射	87
4 电磁波在金属中的传播	94
4.1 复介电常数、复折射率	94
4.2 电磁波在金属界面上的折射	96

4.3	复数波矢 $\tilde{k}$	101
4.4	金属作为良导体的条件	104
4.5	电磁波在金属表面的反射	105
4.6	电磁波的色散	109
4.7	增益介质中的复数折射率 $\tilde{n}$ 、复数极化率 $\tilde{\chi}$ 、增益系数 g	114
5	电磁波在金属波导中的传播	117
5.1	波导管中的场方程及边界条件	117
5.2	矩形波导中的电磁波	118
5.3	无穷大平板波导中的电磁波	129
5.4	圆形规则波导中的电磁波	131
6	电磁波在介质波导中的传播	138
6.1	薄膜介质波导一般概念	138
6.2	射线法分析薄膜波导	139
6.3	用电磁理论求解薄膜介质波导	142
6.4	介质薄膜波导中的场分布	150
6.5	介质平板波导的传输功率	152
6.6	圆形介质波导(光纤)的一般概念	154
6.7	圆形介质波导的电磁理论解法	156
6.8	矢量解的特征方程	160
6.9	矢量解的模式分类及特征方程	162
6.10	矢量模的特性	163
6.11	非均匀光纤	170
7	电磁波在晶体中的传播	176
7.1	晶体基础	176
7.2	晶体中光波的结构	185
7.3	电磁波在不同晶系的晶体中的传播	191
7.4	晶体宏观光学性质的几何表示	197
7.5	光波在晶体表面的折射和反射	210
7.6	双轴晶中的内锥折射和外锥折射	215
7.7	晶体中的非线性效应	219
7.8	电光效应	230
7.9	介质中的磁光效应	248
7.10	其他的非线性光学效应	257
	参考文献	259

1 电磁场理论基础及麦克斯韦方程组

光是一种电磁波,到目前为止,用电磁场理论来处理光的各种问题仍是光学中的一个重要方法. 麦克斯韦在总结了从库仑、安培到法拉第等前人的电磁学定律的基础上,以严格完美的数学形式提出了麦克斯韦方程组,建起了电磁场理论的大厦. 这一方程组描写了电磁场的空间分布、随时间的变化、各场量相互间的联系以及运动情况. 在任意条件下以任意形式传播的电磁波均可以用这一方程组描写,并通过给定的初始条件及边界条件对电磁场求解.

本书就是以电磁场理论为出发点,对光波在各种情况下的传播求解,从而得出光在这些条件下的传播特性. 因此,电磁场理论是本门课程的基础,而场的概念及其数学表达与运算是基本工具.

1.1 场论基础

所谓场,是指带有某种物理量的空间. 用数学语言来描述,即为:如果空间或部分空间中每一点对应于某一量的值,则这样的空间称之为场. 如果对应的该物理量是标量,则这种场称为标量场或数量场: $u(P)=u(x,y,z)$ 或 $u(\rho,\varphi,z)$ 或 $u(r,\theta,\varphi)$. 若该量为矢量,则这种场就称为矢量场: $V(P)=V(x,y,z)$ 或 $V(\rho,\varphi,z)$ 或 $V(r,\theta,\varphi)$.

以上写法采用了三种坐标系,即直角坐标系、柱坐标系及球坐标系. 这是在电磁场理论中用得最多的坐标系. 下面介绍场论中的几个基本概念.

1.1.1 方向导数

设定一标量场 $u(P)=u(x,y,z)$. 为直观观察场的变化,将具有同一函数值 C 的点集合在一起,这些点组成一曲面,即 $u(P)=C$ (C 为常数),这样的曲面称之为等位面或等量面. 例如点电荷 q (坐标为 $0,0,0$) 产生的电位场为 $u=q/4\pi\epsilon r$, 它的等位面方程为 $q/4\pi\epsilon r=C$, 或

$$x^2 + y^2 + z^2 = (q/4\pi\epsilon C)^2$$

这是一簇以原点为球心的球面. 通常选择常数 C 为等差级数,此时在任何切割平面上都能得到等位线图形. 等位线密度给出了关于在场的各个方向上 u 变化情况的清晰概念. 由于 C 取的是等差级数,显见等位线越密, u 的空间变化速率越大.

偏导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0}$ 、 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0}$ 、 $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0}$ 能表达标量场 u 中 P_0 点沿 x 、 y 、 z 轴方向变化的大小;而对于标量场 $u(P)$,需要研究某一点沿任一方向的变化情况,故定义方向导数的概念如下:

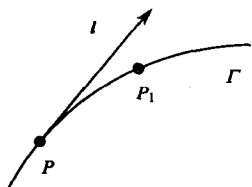


图 1.1.1 方向导数示意

定义 1.1 设 Γ 是通过场 $u(P)$ 中某一点 P 的任一条曲线, l 是 Γ 曲线在 P 点的切线(图 1.1.1), 若极限

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{u(P_1) - u(P)}{\widehat{P_1 P}} \quad (1.1.1)$$

存在,则称此极限为场 $u(P)$ 在 P 点沿 l 方向的方向导数,记作为 $\frac{\partial u}{\partial l}$. 可见 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 是 $u(P)$ 沿 x 、 y 、 z

方向的方向导数,且有关系式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial l} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

这就是方向导数的解析表示式,其中 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 为切线 l 的方向余弦. 场 $u(P)$ 在某点 P 上沿不同方向具有不同的方向导数值,即沿不同方向其变化率不同. 由此引出了最大变化率即梯度的概念.

1.1.2 梯度

引入矢量 $\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$, 并记之为 $\text{grad } u$ 或 ∇u , 设 l 方向上单位矢量为 L , 即

$$L = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} \quad (1.1.3)$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u) \cdot L = \nabla_l u \quad (1.1.4)$$

上式表明数量场 $u(P)$ 在任一点 P 处沿任一方向 l 的方向导数是矢量 ∇u 在该方向上的投影. 由此可知, 当 l 的方向与 ∇u 的方向重合时, 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 值为最大. 由此得出结论: 矢量 ∇u 的方向是使 $u(P)$ 在 P 点上方向导数最大的方向, 而 ∇u 的模就是最大的方向导数值. 矢量 ∇u 就称为数量场 $u(P)$ 在 P 点的梯度.

梯度与等位面的关系: 由于在等位面上 $u(P)$ 为常量, 故有 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 即 $(\nabla u) \cdot L$

$=0$. 可见, 梯度 ∇u 垂直于等位面的切平面, 即梯度 ∇u 与等位面的法线平行.

结论 场 $u(P)$ 在 P 点的梯度 ∇u 具有如下性质:

- (1) $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$, ∇u 为矢量.
- (2) ∇u 的方向沿着过 P 点的等位面之法线方向(一般指向为 $u(P)$ 的增加方向).
- (3) ∇u 的大小即为沿等位面法线方向的方向导数值, 也是 P 点的最大方向导数值.

引入

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.1.5)$$

称之为哈密顿(Hamilton)算子. 它既是一个微分算子, 又是一个矢量, 故也称之为矢性微分算子.

1.1.3 散度

散度是针对矢量场而言的. 首先引入流量概念: 对任意矢量场 $\mathbf{A}(P)$, 称式

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} ds \quad (1.1.6)$$

为通过封闭曲面 S 的流量. 其中 $\mathbf{N}$ 是曲面 S 的外法线方向单位矢量.

设场 $\mathbf{A}(P)$ 是一个稳定的不可压缩的流体流速场, 这样, 在任一时刻内在曲面 S 中储藏的流体量保持不变, 通过封闭曲面 S 的净流量也不变.

(1) 当 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$ 时, 曲面 S 内无沟也无源.

(2) 当 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} > 0$ 时, 曲面 S 内有源.

(3) 当 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} < 0$ 时, 曲面 S 内有沟.

设封闭曲面 S 包围的体积 V 中只有源, 则 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} > 0$ 表示由曲面 S 内的源所发出的液量, 亦即表示源的强弱. 而 $(\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})/V$ 表示单位体积内的源所发出的液量大小, 即表示 V 中源的平均强度. 当曲面以任意方式压缩成点 P 时, 上式之极限即表示点 P 处源的强度, 称之为矢量 $\mathbf{A}$ 在 P 点的散度, 记作 $\text{div} \mathbf{A}$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

散度定义

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{D(V) \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{V} \quad P \in V \quad (1.1.7)$$

由定义知散度是一个数量场,其值仅与点 P 的位置有关,而与坐标系选择无关.在直角坐标系中有

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.1.8)$$

其中

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

散度有如下两个基本性质:

$$(1) \nabla \cdot (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{A} + \beta \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

$$(2) \nabla \cdot (u \mathbf{A}) = u \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla u \quad (u \text{ 为数量场}).$$

若在矢量场 $\mathbf{A}(P)$ 中处处有 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 则称 $\mathbf{A}(P)$ 为无源场或管量场. 在管量场中, 通过由力线构成的矢量管上任两个截面 σ_1 和 σ_2 的通量(流量)是一个定值, 此流量称矢量管的强度(图 1.1.2).

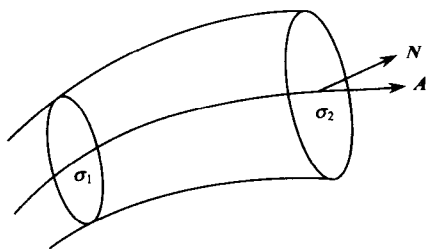


图 1.1.2 管量场中的矢量管

1.1.4 旋度

对于具有通量源的矢量场, 可以用通量及散度(div)表示, 而对于具有旋涡源的矢量场, 则可以用环流量及旋度(rot)表示(图 1.1.3). 引入环流及环流密度的概念.

环流——在矢量场 $\mathbf{A}(P)$ 中, 矢量 $\mathbf{A}$ 沿封闭曲线 Γ 路径的线积分 $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} A \cos \theta dl$, 称之为矢量 $\mathbf{A}$ 沿 Γ 曲线的环流量. 对于具体的场, 环流量有其具体的意义, 例如 $\mathbf{A}$ 为力场, 则 $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 是力沿封闭曲线 Γ 所做的功.

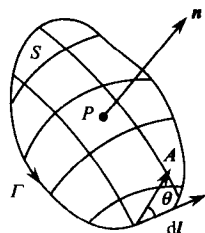


图 1.1.3 环流及旋度

环流密度——矢量场中给定一点 $P(x, y, z)$, 通过 P 点有一小曲面 S , 边界为 Γ , 法线为 $\mathbf{n}$, 则 $\frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{S}$ 表示了在此面积上环流的平均值. 当曲面 S 按任意方式缩成一点时, 若上式的极限存在, 则称之为场 $\mathbf{A}$ 在 P 点在 $\mathbf{n}$ 方向上的环流密度

$$W_n(P) = \lim_{D(S) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{S} \quad P \in S \quad (1.1.9)$$

环流密度 $W_n(P)$ 不仅与点 P 的位置有关, 还与法线 n 的方向有关. 同一点 P 上不同方向上的环流密度是不同的. 其中使场 A 在该点具有最大环流密度的方向即为旋度的方向, 而其最大环流密度的模即为该点旋度的模, 由此定义旋度. 它是一个矢量, 记作 $\text{rot } A$ 或 $\nabla \times A$.

$$\text{rot } A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.1.10)$$

设 $N = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$ 是曲面法线 n 的单位矢量, 则可以由斯托克斯公式证明

$$\begin{aligned} (\nabla \times A) \cdot N &= \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_r A \cdot dl}{S} = W_n(P) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

由此可见, n 方向上的环流密度是旋度 $\nabla \times A$ 在该方向上的投影.

结论 矢量场 $A(P)$ 在 P 点的旋度 $\nabla \times A$ 具如下性质:

$$(1) \nabla \times A = \text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \nabla \times A \text{ 是矢量.}$$

(2) $\nabla \times A$ 的方向是该点环流密度最大的方向.

(3) $\nabla \times A$ 的大小即为该点最大环流密度值.

旋度的基本性质:

$$(1) \nabla \times (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla \times A + \beta \nabla \times B \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数})$$

$$(2) \nabla \times (uA) = u \nabla \times A + \nabla u \times A \quad (u \text{ 为数量场})$$

1.1.5 势函数, 势量场

据前所述, 梯度 $\nabla u(P)$ 是数量场 $u(P)$ 的梯度场, 梯度场是矢量场. 例如, 若有温度场 $u(P)$, 则梯度 $\nabla u(P)$ 代表了各点温度变化最大的方向及大小, 即温度场的梯度场是矢量场. 实际中这类场是大量存在的.

定义 1.2 对于矢量场 $A(P)$, 如果存在单值函数 $u(P)$, 使得 $A = \nabla u$, 则称 $A(P)$ 为势量场, $u(P)$ 称为势量场 $A(P)$ 的势函数. 用数学式表达为

$$A = A_x i + A_y j + A_z k = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \quad (1.1.12)$$

定义 1.3 设矢量 $\mathbf{A}$ 的三个分量 A_x, A_y, A_z 在单连通域 D 中连续且具有连续偏导数, 则在 D 中以下断语相当:

- (1) $\mathbf{A}$ 是一个势量场, 又称保守场.
- (2) $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}$ 必是无旋场 (因为 $\nabla \times \nabla u = 0$).
- (3) $\oint_R \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 回路积分为零.
- (4) $\int_{r_1}^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_2}^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 线积分 $\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 与路径无关.
- (5) 势量场 $\mathbf{A}$ 的势函数 u 为保守函数.

例如, 重力场、静电场均为势量场. 点电荷产生的电场强度 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \cdot \mathbf{r}$. 可以证明具有这种中心场形式的场 $\mathbf{A} = f(r) \cdot \mathbf{r}$ 必为势量场, 或称保守场.

对于无旋场 $\mathbf{A}$, 它的势函数 u 是标量, 故又称 u 是矢量场 $\mathbf{A}$ 的标势. 对于无源场, 必有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 故可定义一个矢势 $\mathbf{A}$, 使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, 故对任一无源场必存在一矢势 $\mathbf{A}$.

标势(无旋场)

$$\nabla \times \nabla u = 0$$

$$\mathbf{A} = \nabla u \rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

u 为 $\mathbf{A}$ 的标势

矢势(无源场)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{B}$ 的矢势

有关时变电磁场的动态标势及矢势将在有源波动方程一节中详细讨论.

1.2 静电场、静磁场基本定律

1.2.1 静电场

1. 库仑定律

两点电荷带电量为 q_1, q_2 , 相距为 r , 则电荷 1 对电荷 2 的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (1.2.1)$$

式中, $\mathbf{r}_0$ 为 $\mathbf{r}$ 的单位矢量; $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ 法拉/米(F/m); ϵ_r 为相对介电常数.

作用力叠加原理: i 个点电荷作用在第 j 个电荷上的作用力为

$$\mathbf{F}_j = \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \sum_i \frac{q_i q_j}{(r_{ij})^2} \cdot \mathbf{r}_{ij0} \quad (1.2.2)$$

式中, r_{ij} 为第 i 个电荷到第 j 个电荷的距离; $\mathbf{r}_{ij0}$ 是 $\mathbf{r}_{ij}$ 的单位矢量.

当电荷为连续分布时, 设电荷密度为 $\rho(\mathbf{r})$, 则体电荷对电荷 q_j 的作用力为

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \frac{q_j \cdot \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_{j0}}{r_j^2} dv \quad (1.2.3)$$

式中, r_j 为体元 dv 到 q_j 的距离; $\mathbf{r}_{j0}$ 为 $\mathbf{r}_j$ 的单位矢量.

2. 电场

从场的观点出发则认为, F_{21} 是由 q_1 产生静电场对点电荷 q_2 产生的电场力. 由 q_1 产生的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|^2} \quad (1.2.4)$$

则 q_2 在电场 $\mathbf{E}_1$ 中所受的电场力为

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot q_2 \quad (1.2.5)$$

电场叠加原理: 由 i 个点电荷产生的合电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \quad (1.2.6)$$

由体电荷产生的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \rho(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{v} \quad (1.2.7)$$

其中 $\mathbf{r}'$ 为体元到场内任一点 P 的距离矢量, $\mathbf{r}$ 为任一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量.

3. 高斯定理

通过闭合曲面 S 的总电通量 Φ_e 等于曲面 S 所包围的电荷总量 Q , 即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i q_i = Q \quad (1.2.8)$$

高斯定理的微分形式可由取极限求得

$$\lim_{D(V) \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{V} \right] = \lim_{D(V) \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{V} \right) \quad (1.2.9)$$

得到微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2.10)$$

4. 静电场的场特性

(1) 由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 得, 静电场散度为 ρ , 静电场是有源场, 源的强度与该点电荷密度有关.

(2) 静电场是中心场, 故 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 即静电场是无旋场, 沿闭合曲线一周电场力做功为零. 电场力做功仅与起止点位置有关.