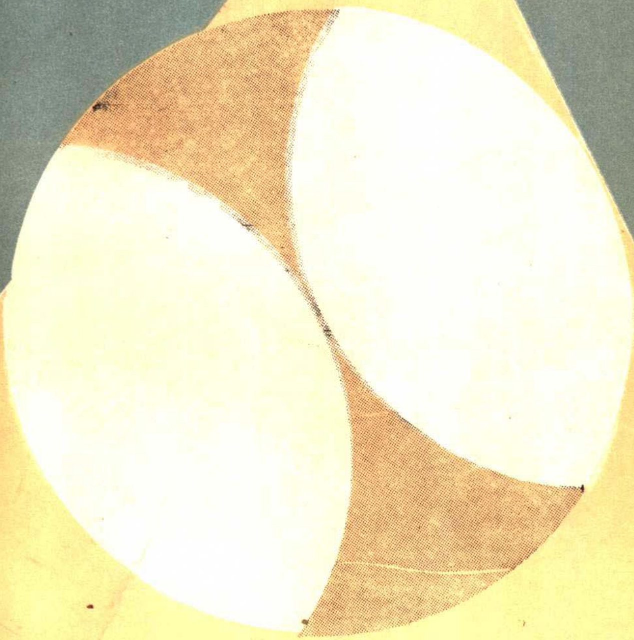
ZhXShX

中学数学丛书

揭方琢

相似形与圆



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

相似形与圆

揭 方 琢

湖 北 教 育 出 版 社

相似形与圆

揭方琢

●

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北通山县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　7.25印张　1插页　160,000字

1986年5月第1版　1986年5月第1次印刷

印数：1—4,300

统一书号：7306·232　　定价：1.10元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》，《概率统计初步》，《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

目　录

第一章　相似多边形

§ 1．相似多边形的概念

在生产和生活的实践中，常常遇到图形的放大或缩小，得出的图形与原图形比较，它们的形状是一致的．这种形状相同的图形，在数学中被抽象为相似形．

图形的形状只是一个直观的观念．我们知道，三角形和四边形是形状不同的图形，正方形和邻边不等的矩形也是形状不同的图形，它们都不是相似形．然而同样是矩形，如图1．1中ABCD与A′B′C′D′，它们是否是相似的图形呢，也就是说它们的形状是否相同呢？这就要求给出一个标志，借以判定形状相同或图形相似．

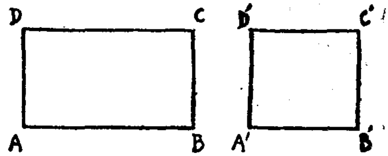


图1.1

初等几何里研究的图形主要是多边形和圆．一个多边形经放大（或缩小）得出的图形与原图形比较，它们的对应角是相等的，对应边的比值是同一个数．这两个特征就可作为多边形形状相同的标志．因此借助它们可以给出多边形相似的如下定义：

定义　如果两个多边形的对应角相等，对应边都成比例，则这两个多边形叫做**相似多边形**．

表示相似的记号“∽”是取自拉丁语 Similitudo(相似)的第一个字母S，以逆时针方向旋转90°而得.

相似多边形的对应边的比叫做相似比或相似系数. 准确地说，多边形ABC… G∽多边形 A′B′C′…G′ 的相似比是 $\frac{AB}{A'B'}$，而多边形A′B′C′…G′∽多边形ABC…G的相似比是 $\frac{A'B'}{AB}$.

按照这个定义，两个全等的多边形是相似多边形. 但反过来则不对，相似的多边形未必全等.

由定义易于推出多边形相似的下列基本性质：

（1）对于任何多边形F，有F∽F（反身性）.

（2）若多边形F∽多边形F′则多边形F′∽多边形F(对称性). 并且，如果F∽F′的相似比是k，则F′∽F的相似比是 $\frac{1}{k}$.

（3）若多边形F∽多边形F′，多边形F′∽多边形F″，则多边形F∽多边形F″（传递性）. 并且，如果F∽F′、F′∽F″的相似比分别是k_1、k_2，则F∽F″的相似比是k_1k_2.

§2. 相似三角形的判定与性质

多边形中最简单的是三角形. 三角形的相似是研究多边形相似的基础. 因此，我们首先着重考虑三角形的相似.

（一）相似三角形的判定

判别两个三角形ABC与A′B′C′是否相似，按照定义就要考察以下六个等式是否同时成立：

$$\angle A=\angle A', \qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'},$$

$$\angle B=\angle B', \qquad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},$$

$$\angle C=\angle C', \qquad \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

容易看出，三个比例式本质上只是两个，角的三个等式中只要有两个成立第三个也就自然成立。因此按定义来判定两三角形相似，就只需要检验角的两个等式与边的两个比例式。象三角形全等的判定一样，这种检验工作还可通过建立三角形相似的判定定理来进一步简化。

定理1 平行于三角形一边的直线截其他两边所得的三角形与原三角形相似。

如图1.2中左图，若 $DE \parallel BC$，则 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$。

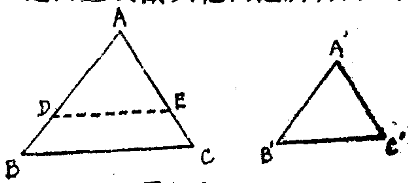


图1.2

以定理1为基础我们可以建立如下的三角形相似的判定定理。

定理2 具备下列条件之一的两三角形必相似：

（1）一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等；

（2）一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等；

（3）一个三角形的三边和另一个三角形的三边对应成比例；

（4）一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且这两边中大边所对的角相等。

定理2的证明的思路是：通过作平行于一个三角形一边的直线，截出一个与另一个三角形全等的三角形。例如在图1.2中，已知$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，在射线AB上取$AD=A'B'$，过D作$DE\parallel BC$，依定理1，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$。又易知$\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$，故$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。

全等三角形是对应边的比皆为1的相似三角形。如果把对应边的比都是1改为都是同一常数k，全等便相应地被改为相似。这样，对于全等三角形的每个判定定理，就相应地可写出相似三角形的一个判定定理。这种关系如下表所示：

全等三角形	相似三角形
边角边定理（注*）	定理2（2）
角边角定理	定理2（1）
角角边定理	定理2（1）
边边边定理	定理2（3）
两边及大边的对角对应相等	定理2（4）

注意，定理2（4）中条件所指的角应是大边所对的角，这一要求是不可缺少的。如图1·3，$\angle A<\angle B$，$DC'\parallel BC$，则$\triangle ADC'\backsim\triangle ABC$。如果以$C'$为圆心，$C'D$为半径画弧交AB于$B'$，连结$B'C'$。这时在$\triangle AB'C'$与$\triangle ABC$中，仍有$\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$，$\angle A=\angle A$。然而这两个三角形并不相似。

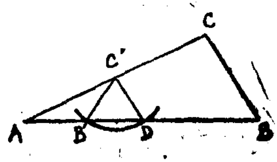


图1.3

（注*）中学教材将边角边、角边角、边边边这三个判定定理作公理提出。

定理2中每一项的条件均包含两个等式，这是对一般三角形的相似来叙述的。具体到特殊的场合，条件的叙述还可相应削减。比如，对于等腰三角形，我们有：

（1）顶角（或底角）对应相等的两个等腰三角形必相似；

（2）所有的等边三角形彼此相似。

具体到直角三角形，则有：

定理3 具备下列条件之一的两直角三角形必相似：

（1）一对锐角对应相等；

（2）两对直角边对应成比例；

（3）一对直角边和斜边对应成比例。

例1 证明：如果两个三角形的对应边互相平行或互相垂直，则这两个三角形相似。

下面以平行的情形为例来证明这个命题。垂直情形的证明与此类似。

证明 如图1.4，设在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$AB /\!/ A'B'$，$BC /\!/ B'C'$，$CA /\!/ C'A'$。据"如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，则这两角或者相等或者互补"，可得

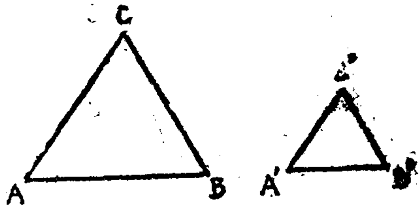
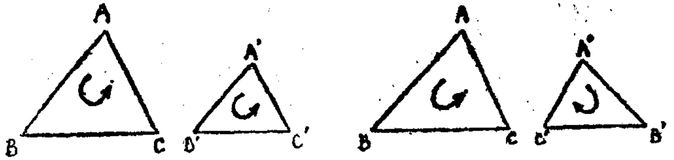


图1.4

$$\angle A = \angle A', \qquad \text{或者} \angle A + \angle A' = 180^\circ$$
$$\angle B = \angle B', \qquad \text{或者} \angle B + \angle B' = 180^\circ$$
$$\angle C = \angle C', \qquad \text{或者} \angle C + \angle C' = 180^\circ$$

右方的三个等式至多有一个成立，否则两三角形的内角和将大于360°。因此左方的三个等式中至少有两个成立。依定理2（1），$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

有时，对三角形的相似须区分以下两种情况：如图1.5(a)$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，并且沿周界ABCA与$A'B'C'A'$，



(a)　　图1.5　　(b)

两三角形有相同的转向（图中标出的都是逆时针方向），这种相似叫**真正相似**；如图1.5(b)，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，沿周界ABCA与$A'B'C'A'$，它们有相反的转向（图中标出的一个是逆时针方向，一个是顺时针方向），这种相似叫**镜象相似**。两个镜象相似的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，把其中一个例如$\triangle A'B'C'$经任意直线l反射（即对于l取轴对称图形），得出的$\triangle A_1B_1C_1$便与$\triangle ABC$真正相似。

（二）相似三角形的性质

除了对应边成比例、对应角相等这些基本性质以外，相似三角形还有以下一些常用的性质：

1.相似三角形的对应高（或中线、或角平分线、或周长等）的比等于相似比。

一般可说作：两相似三角形中对应线段的比等于相似比。

如图1.6中，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$BP=\frac{1}{m}BC$，$BQ=\frac{1}{n}BA$，$B'P'=\frac{1}{m}B'C'$，

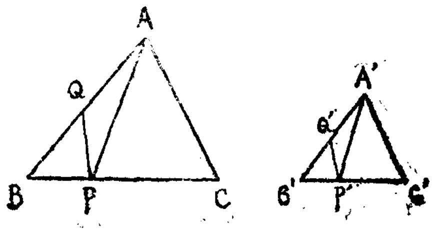


图1.6

$B'Q' = \frac{1}{n}B'A'$. 这时 BP 与$B'P'$，AP 与$A'P'$，PQ与$P'Q'$等都各是一对对应线段，它们的比$\frac{BP}{B'P'}$、$\frac{AP}{A'P'}$、$\frac{PQ}{P'Q'}$等都等于相似比。

2．相似三角形面积的比等于它们的相似比的平方。

3．通过一点的一束直线，在两平行线上截取成比例的线段。

这是因为：如图1.7，

$$l \parallel l' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \triangle ABS \backsim \triangle A'B'S \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'} \\ \triangle BCS \backsim \triangle B'C'S \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} \\ \triangle CDS \backsim \triangle C'D'S \Rightarrow \frac{CD}{C'D'} = \frac{SC}{SC'} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

性质3有下面一个重要的推论：

推论 平行于三角形一边且夹在其它两边间的线段被这边上的中线所平分。

如图1.7中，$AC \parallel A'C'$，若SB'是$\triangle SA'C'$的中线，则这时有$AB = BC$。

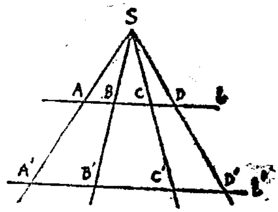


图1.7

（三）相似三角形的应用

应用上述三角形相似的基本知识来解几何题时，如果图中无现成的相似三角形可供利用，则需添设适当的辅助线以造成

相似三角形．作一个三角形与某个已知三角形相似，常用的手段有：（1）过一已知点作平行线；（2）依定比截取线段；（3）引射线使与一直线所成的角等于已知三角形的一个角．

三角形的相似涉及角的相等，因此与角的相等相关的问题，诸如角的倍分、平行、垂直、点共线与线共点、点共圆与圆共点等，常可考虑能否用相似三角形来解；三角形的相似涉及线段成比例，因此与线段的比有关的问题，诸如线段的相等、线段的倍分、比例式或乘积式、面积等，也常可考虑用相似三角形来解．

例2 如图1.8，四边形ABCD的两组对边延长后分别相交于E、F，且EF∥BD．证明：对角线AC的延长线平分EF．

分析 欲证AC的延长线AM平分EF，依性质3的推论只须证得平行于EF且介于∠A的两边间的某一线段为AM所平分．由条件难于直接推出BD为AM所平分，故不妨过C另作EF的平行线GH．此时，$\triangle BCG\backsim\triangle BFE\Rightarrow\dfrac{GC}{EF}=\dfrac{BC}{BF}$，

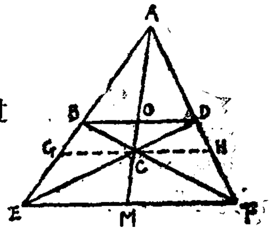


图1.8

$\triangle DCH\backsim\triangle DEF\Rightarrow\dfrac{CH}{EF}=\dfrac{DC}{DE}$．如能证明$\dfrac{BC}{BF}=\dfrac{DC}{DE}$，则将有$\dfrac{GC}{EF}=\dfrac{CH}{EF}$，从而$GC=CH$．但由EF∥BD的条件可得$\dfrac{BC}{CF}=\dfrac{DC}{CE}$，由此即见$\dfrac{BC}{BF}=\dfrac{DC}{DE}$．于是由$GC=CH$及GH∥EF，据性质3的推论便可得出$EM=MF$．

例3 设E、F分别为四边形ABCD的边AB、CD上的点，

且$\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}=\frac{AD}{BC}$，证明EF与AD及BC形成相等的角。

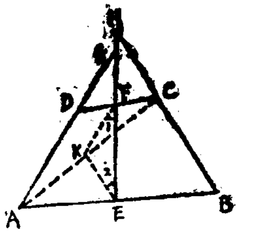


图1.9

分析 待证相等的两个角∠G和∠H位置错开，且和条件所给的成比例线段发生不了联系，自然考虑平行移位。如若过F作FK∥AD(图1.9)，则∠G＝∠1，$\frac{AK}{KC}=\frac{DF}{FC}=\frac{AE}{EB}$ ⇨EK∥BC⇒∠H＝∠2。于是问题转化为证明∠1＝∠2，亦即转化为证明EK＝FK。而这可由下面的推理得之：

$\triangle AEK\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{EK}{BC}=\frac{AK}{AC}$，$\triangle CFK\backsim\triangle CDA\Rightarrow\frac{FK}{AD}=\frac{KC}{AC}$。两式相除得$\frac{EK}{FK}\cdot\frac{AD}{BC}=\frac{AK}{KC}$。但$\frac{AK}{KC}=\frac{DF}{FC}=\frac{AD}{BC}$，从而$\frac{EK}{FK}=1$，此即EK＝FK。

例4 在等腰△ABC中，顶角A＝100°，∠B的平分线交AC于D，求证AD＋BD＝BC。

分析 由条件知∠BDC＝∠A＋∠ABD＝120°，∴BC＞BD。故若在BC上截取BE＝BD，则证明AD＋BD＝BC便转化为证明AD＝EC。BD是∠B的平分线的条件给出$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$。若能证明$\frac{EC}{DC}=\frac{AB}{BC}$，则将有AD＝EC。这就引导我们来考察△EDC与△ABC是否相似。

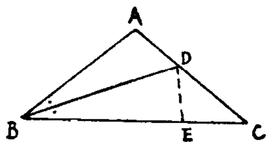


图1.10

由$\angle CED=180°-\angle BED=180°-\frac{1}{2}(180°-20°)=100°=\angle A$及∠C＝∠C，知△EDC∽△ABC，从而有