山东教育出版社

中学数学解题逻辑错误分析

前　言

中学生在解数学题时常常出现这样或那样的错误，这些错误大都是逻辑错误，是逻辑思维能力差造成的。为帮助他们改正这些错误，学好数学，我们编写了《中学数学解题逻辑错误分析》。

本书通过对中学生数学解题中的典型错误的分析，向读者介绍一些逻辑基础知识，使读者既能找到产生这些错误的本质原因，又能从中学到一些学习数学时必不可少的逻辑知识。全书包括概念、判断、推理、证明、证明方法及逻辑思维基本规律六大部分，分二十七个问题讲述。每一部分后面都有一些练习题供读者自我检查用，书的后面还附有练习题的参考答案或提示。

在本书编写过程中，曾得到刘世英、王维智、刘益阳等同志的大力支持和帮助，在此向上述同志表示感谢。

书中的缺点和不妥之处，恳望读者批评指正。

编　者

一九八七年三月

目　　录

附录

一、概念、判断、推理之间的关系

解答证明题需要推理，这是同学们所熟悉的。但是如果问："解答计算题要不要推理？"可能就会有不少同学答不上来。如果再问："什么是推理、什么是判断、什么是概念，这三者又有什么关系？"可能就会有更多的同学答不上来了。

为了回答这些问题，下面我们先来看一道简单的数学题及其解答：

解方程　$2x-18=0$。

解：移项得$2x=18$，

两边除以2，得$x=9$，

$\therefore$原方程的解是$x=9$。

上面的解答，思维过程是：

（1）$\because$方程两边都加上同一个数，所得的新方程与原方程同解，

$$\therefore 2x-18+18=0+18\text{与}2x-18=0\text{同解，}$$

即$2x=18$与$2x-18=0$同解。

（2）$\because$方程两边都除以不等于零的同一个数，所得的新方程与原方程同解，

$$\therefore \frac{2x}{2}=\frac{18}{2}\text{与}2x=18\text{同解，}$$

即$x=9$与$2x=18$同解。

（3）∵如果第一个方程与第二个方程同解，第二个方程又与第三个方程同解，那么第一个方程与第三个方程同解。

而$2x-18=0$与$2x=18$同解，$2x=18$又与$x=9$同解，

∴$2x-18=0$与$x=9$同解。

（4）∵如果两个方程同解，那么第一个方程所有的解都是第二个方程的解，第二个方程所有的解都是第一个方程的解。

$2x-18=0$与$x=9$同解，且方程$x=9$的解是$x=9$，

∴$2x-18=0$的解是$x=9$。

上例（1）中出现的"方程"、"加"、"同一个数"、"同解"等词语，我们称为概念。概念是反映客观事物本质属性的思维形式。一般来说，单独一个概念往往不能表达完整的思想，至少可以说，单独一个概念能表达的内容不多。只有将概念和概念按一定规则联系起来，才能表达完整的思想，表达更多的内容。例如只说"方程"，就不可能给出关于方程的更多的知识，但是，如果说："方程的两边加上同一个数，所得的新方程与原方程同解"，那就给出了方程的一个重要性质。象这样，利用概念与概念的联合，对客观事物有所肯定或否定的思维形式就是判断。

上例（1）中就出现了这么一些判断："方程的两边都加上同一个数，所得的新方程与原方程同解"，"$2x=18$与$2x-18=0$同解"等等。由此可见，判断是由概念构成的。

上例（1）中，由判断"方程两边都加上同一个数，所得的新方程与原方程同解"得出新的判断"$2x=18$与$2x-18=0$同解"。象这样运用已知的判断推出新的判断的思维形

式叫做推理。推理由判断构成。

上例（1）、（2）、（3）、（4）都是推理。通过这一连串的推理，我们完成了这道数学题的解答。一般地说，数学题的解答都离不开推理。

二、错在哪里？

——掌握概念的重要性

有这样一道数学题：

若α是第一象限的角，且$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$.

有一位同学这样解：

$\because \alpha$是第一象限的角，且$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore \alpha=60^\circ$，

$\therefore \frac{\alpha}{2}=30^\circ$，

因此，$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

然而，正确的答案是$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$或$\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$. 那么，这位同学的解答错在哪里呢？

原来，这位同学没有真正地理解“第一象限的角”这个概念. “第一象限的角”并不只限于大于0°而小于90°的角，而是“终边落在第一象限的角”.

正确的解答是：

$\because \alpha$是第一象限的角，且$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore \alpha = k \cdot 360° + 60°$ (k是整数)，

$\therefore \dfrac{\alpha}{2} = k \cdot 180° + 30°$.

$\therefore$ 当k是偶数时，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin(k \cdot 180° + 30°) = \dfrac{1}{2}$；

当k是奇数时，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin(k \cdot 180° + 30°) = -\dfrac{1}{2}$.

因此，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$或$\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

我们已经知道，推理由判断构成，判断由概念构成，所以掌握概念是正确解答数学题的前提。

同学中由于没有掌握概念而引起解题错误的例子是经常可以见到的。

例1　某工厂今年产量比去年产量多10%，问去年产量比今年产量少百分之几？

错解：去年产量比今年产量少10%。

简析：百分数有个"谁作基数"的问题。今年产量是去年产量的百分之几，应以去年产量为基数，即$\dfrac{\text{今年产量}}{\text{去年产量}}$，而去年产量是今年产量的百分之几，则应以今年产量为基数，即$\dfrac{\text{去年产量}}{\text{今年产量}}$。今年产量比去年产量多百分之几，应该是$\dfrac{\text{今年产量}-\text{去年产量}}{\text{去年产量}}$；而去年产量比今年产量少百分之几，则应该是$\dfrac{\text{今年产量}-\text{去年产量}}{\text{今年产量}}$。

正确解法是：

设去年产量为a，则今年的产量是（1＋10%)a.

$$\frac{(1+10\%)a-a}{(1+10\%)a}\approx 0.0909=9.09\%.$$

因此，去年产量比今年产量少9.09%.

例2　在有理数范围里分解因式x^4+x^2+1.

错解：原式$=(x^4+x^2)+1=x^2(x^2+1)+1$.

简析：因式分解的概念是："把一个多项式变成几个整式的乘积的形式"．而上面的解答没有变成几个整式的乘积的形式，因而没有达到因式分解的目的.

正确的解法是：

$$\begin{aligned}原式&=x^4+2x^2+1-x^2\\&=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2+1+x)(x^2+1-x)\\&=(x^2+x+1)(x^2-x+1).\end{aligned}$$

例3　设复数$z=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$，求$z^2$.

错解：根据棣美佛定理

$$\begin{aligned}z^2&=2^2\left[\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)\\&=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\&=2\sqrt{3}+2i.\end{aligned}$$

简析：复数的三角形式应是$r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中，

$r \geqslant 0$。复数$z=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$不是复数的三角形式，不能直接运用棣美佛定理。

正确的解法是：

$$
\begin{aligned}
z&=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)\\
&=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\\
z^2&=2^2\left[\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=-2+2\sqrt{3}i.
\end{aligned}
$$

例 4　如图 1，已知平面α与平面β相交于直线l，AC是平面α内的直线，BD是平面β内的直线，AC仅有A点在交线l上，BD仅有B点在交线l上，且A、B是交线l上不同的两点，试证明：AC和BD是异面直线。

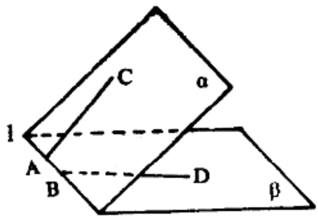

图 1

错证：

∵AC在α内，BD在β内，

∴AC、BD在不同的平面内，

∴AC、BD是异面直线。

简析：“异面直线”的概念确切地讲应是：“不在同一平面内的两条直线叫异面直线”。而分别在两个平面内的两条直线不一定是异面直线，例如当这两条直线平行或者相交时，它们就在同一平面内，这时它们就是共面直线了。

正确的证明是：

假设AC、BD不是异面直线，那么AC、BD就在同一平面内，设这个平面为r，自然，A、C、B、D四点都在r内。

∵A点、B点在交线l上，

∴A点、B点既在平面α上，又在平面β上。

∵A、B、C在平面α上，又在平面r上，

∴平面α与平面r重合。

∵A、B、D在平面β上，又在平面r上，

∴平面β与平面r重合。

∵平面α与平面r重合，平面β与平面r重合。

∴平面α与平面β重合。这与已知条件“平面α与平面β相交”矛盾，说明假设不成立，因此，AC、BD是异面直线。

掌握概念的关键要真正理解概念的内涵和外延。概念的外延，就是这个概念所指的一切事物，也就是适合于该概念的一切对象；概念的内涵，就是这个概念所指事物的本质属性的总和。例如，“第一象限的角”这个概念的外延是：$5°$，$12°30'$，$89°59'$，$400°$，等；内涵是：“终边落在第一象限的角”或者“满足$k\cdot360°+\alpha$的角，其中k是整数，

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$”.再如“质数”这个概念，它的外延是：2，3，5，7，11，13等；内涵是：“在自然数中，除单位1外，其他只能被1和本身整除的数”.

为了把概念的外延搞清楚，可以用划分的方法；为了把概念的内涵搞清楚，可以用定义的方法。对于一个概念，只有给它作出正确的划分和正确的定义，才算对这个概念的外延和内涵搞清楚了，才算真正理解了这个概念。

三、一种特殊的表

——概念的划分规则

数学老师在指导我们复习时，常常用一种特殊的列表方式帮助我们系统地掌握所学过的概念．例如复习“数”时常用下表：

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
  - 虚数
    - 纯虚数
    - 非纯虚数

将一个大概念（通常称种概念）分成若干个小概念（通常称属概念），也就是将某概念所指的一大类对象，分成若干小类，叫做概念的划分．概念的划分可以使我们了解概念间的关系．它是揭示概念外延的逻辑方法，在科学研究中占重要地位．

概念的划分要遵守下面四条规则．

第一条规则：每一次划分要按同一标准进行．

例如，“三角形分直角三角形，等腰三角形和锐角三角形”就违反了这条规则．因为其中的等腰三角形是根据边的长短划分的，而其中的直角三角形和锐角三角形是根据角的大小划分的，这就没有按同一标准划分．

第二条规则：划分后，属概念的外延的和，应与种概念的外延相等，不能多，也不能少．

例如，“四边形分平行四边形和梯形”就违反了这条规则．因为漏了“一般的四边形”，属概念的外延的和，小于种概念的外延．

第三条规则：划分后，属概念不能有交叉、重叠现象．

例如，“特殊的平行四边形分矩形、正方形、菱形”就违反了这条规则．因为正方形既是矩形又是菱形，属概念有交叉现象．

又如，“三角形分不等边三角形、等腰三角形和等边三角形”也违反了这条规则．因为等边三角形也是等腰三角形，属概念有重叠现象．

第四条规则：划分应按层次逐级进行，不能跳跃．

例如，代数式的划分应当是：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

而不能为

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}
$$

违反概念划分规则的现象是经常可以见到的。例如：

“角有锐角、直角、钝角、邻角、补角、对顶角、同位角、内错角等”就违反了第一条规则。因为这样的划分没有按同一标准进行。

“整数分正整数和负整数”就违反了第二条规则。因为这样划分遗漏了“零”，属概念的外延的和，小于种概念的外延。

“自然数分奇数、偶数和零”也违反了第二条规则。因为“零”不属于自然数，属概念的外延的和，大于种概念的外延。

“有理数包括整数、分数和零”就违反了第三条规则。因为“零”包含于整数，属概念出现了重叠现象。

“方程分有理方程和无理方程”就违反了第四条规则。因为方程应先分代数方程、超越方程，而代数方程再分有理方程和无理方程。

由于忽视概念的划分或不懂得怎样划分而造成解题错误的例子也是经常可以见到的。

例1　a、b、c是△ABC的三边，且$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$，问△ABC是怎样的三角形。

错解：由$a-b=0$，得△ABC为等腰三角形；由$a^2+b^2-c^2=0$，得△ABC为直角三角形；由$a-b=0$且$a^2+b^2-c^2=0$，得△ABC为等腰直角三角形。