最新修订

发散思维辅导

初中三年级

数学

发散思维

安徽教育出版社

初中三年级

CHUZHONG SAN NIANJI

数 学

SHU XUE

发散思维辅导

主 编: 宏 宇

编写者: 宏 宇 胡定华

孙大训 郭莉君

程朋利

安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学发散思维辅导. 三年级/宏宇主编. －2版.
合肥:安徽教育出版社,2001.7
(中学各科发散思维辅导)
ISBN 7-5336-1935-8

Ⅰ.初… Ⅱ.宏… Ⅲ.数学课－初中－教学参考
资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044573 号

责任编辑:武常春　　　　装帧设计:黄　彦
出版发行:安徽教育出版社(合肥市跃进路 1 号)
网　　址:http://www.ahep.com.cn
经　　销:新华书店
排　　版:安徽飞腾彩色制版有限责任公司
印　　刷:合肥朝阳印刷有限责任公司
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:11.75
字　　数:350 000
版　　次:2001 年 7 月第 2 版　　2001 年 7 月第 1 次印刷
定　　价:12.10 元

发现印装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换
电　话:(0551)2651321　　　　邮　编:230061

再版说明

发散思维作为一个新的教研课题，已受到广大师生的高度重视．发散思维即求异思维，它的图示就是从一点出发，向思维空间发出的一组射线，犹如夜空中一道道闪电，激发学生思维的火花．

发散思维具有多向性、变异性、独特性的特点，即思考问题时注重多途径、多方案，解决问题时注重举一反三、触类旁通，这与数学知识的思维特征极为相似，历史上许多重要的数学发现来源于发散性思维，因此在中学阶段，结合数学教学，正确培养和发展学生的发散思维能力，对造就创造型人才，至关重要．

有鉴于此，我们约请具有长期教学经验的教师，编写了这套《初中数学发散思维辅导》．本书紧扣教学大纲和现行数学课本，按年级分册，各册书均按现行课本章节编写，每章均由：知识系列、发散点分析、发散思维辅导、基础性发散思维训练题、提高性发散思维训练题五部分组成．

训练题大多是以课本中的习题为基础，围绕下述各种发散思维形式，加以改造设置的．家长借此可以检查学生对课本各章节知识的掌握程度;学生借此可以评估课堂学习效果．

全书的结构框架如下：

知识系列——将课本各章知识加以归纳、概要，为引导学生发散思维首先奠定基础．

发散点分析——指明各章知识网络中进行发散思维的“结点”，启发和诱导学生逐步进入发散思维空间．

发散思维辅导——借助具体实例，采用题型发散、解法发散、纵横发散、变更命题发散、转化发散、迁移发散、构造发散、逆向发散、分解发散、综合发散等多种形式，对学生进行多思、多解、多变的解题辅导．题型发散是将由发散点出发的典型问题，变换其题型，进行发散思维；解法发散则通过一题多解、多题一解等方法，进行发散思维；纵横发散是通过两个或多个发散点间的联系，以及发散点与其他知识点间的联系，借助例题形成发散思维；变更命题发散是通过变更命题形式，或维持原命题的条件而改变结论，或改变原命题的条件而维持原结论不变，或同时改变原命题的条件、结论来进行发散思维训练；转化发散是通过保持原命题的实质而变换其形式来进行发散思维训练；迁移发散是利用数式、图形在不同的数学分科中的不同含义与等价形式，把一个分科里的公式、定理、原则或方法，巧妙地迁移到另一个分科中，达到化难为易的目的而进行的发散思维；构造发散是通过逻辑思维和丰富的联想，恰当地构造出某些元素(如数、式、方程、函数、几何图形、解析几何模型、等价命题等)，使问题变成新元素，或变成新元素之间的一种新的组合形式，从而使问题得以解决的一种发散思维；逆向发散是由目标至条件的定向思考的一种发散思维；分解发散是把一个命题分解成一些单纯命题并逐个加以分析和解决的发散思维；综合发散是通过教材各章发散点之间的联系，数学各科之间的相互联系，数学与其他学科之

间的联系来进行发散思维训练．

本书 1996 年初版以来，深受中学师生欢迎，普遍认为这是一套有利于初中各年级学生学习，以及毕业班学生综合复习的课外读物．因此，现结合 2000 年教材改革的实际情况和广大读者的建议，修订再版，欢迎购阅．

目录

代数部分

几何部分

目

录

第十二章

一元二次方程

知识系列

一、一元二次方程的概念及其解法

1. 整式方程

方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程是一个整式方程.

2. 一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

关于 x 的一元二次方程的一般形式为： $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其中 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数，bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项. 一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数，二次项系数 a 是不等于零的实数.

3. 一元二次方程的解法

(1)直接开平方法　用直接开方求解一元二次方程的方法叫做直接开平方法. 用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的方程，得解为 $x=\pm\sqrt{b}+a$.

(2)配方法　方程整理成 $ax^2+bx=-c$ 的形式，并用二次项系数去除方程的各项，得　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$.

在方程两边各加上一次项系数一半的平方：$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+$

$(\frac{b}{2a})^2$，使得方程的左边成为一个二项式的完全平方：$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，只要方程右边是非负数，就可用直接开平方法求出方程的根

(3) 公式法　把一元二次方程化成一般形式，然后把各项系数 a，b，c 的值代入求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant0$）就可以求得方程的根，这种解一元二次方程的方法叫做公式法.

(4) 因式分解法　把方程变形为一边是零，把另一边的二次三项式分解成两个一次因式的积的形式，让两个一次因式分别等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程所得到的根，就是原方程的两个根这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

4. 一元二次方程根的判别式

b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式，用符号“Δ”表示.

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根，即 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$（以上两种情况综合为当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时方程有实根）；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述命题的逆命题也是正确的：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 若有两个不相等的实数根，必有 $\Delta>0$；

若有两个相等的实数根，必有 $\Delta=0$（若有实数根，必有 $\Delta\geqslant0$）；

若没有实数根，必有 $\Delta<0$.

5. 一元二次方程的根与系数的关系（即韦达定理）

设方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根为 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

韦达定理的逆命题也是正确的，即如果：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，那么 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

6. 二次三项式的因式分解

分解二次三项式 ax^2+bx+c 的因式时，先求出方程 $ax^2+bx+c=0$

的两个根 x_1、x_2，然后写成 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. 这里特别要注意：在书写答案时，不要漏写二次项系数 a.

二、可化为一元二次方程的方程

1. 分式方程

分母中含有未知数的方程叫做分式方程．本章研究可化为一元二次方程的分式方程.

把分式方程化为整式方程通常用各分式的最简公分母去乘方程的两边，约去分母，使之成为整式方程，有时也可根据某些方程的特点，采用换元法，把分式方程化成整式方程去求解．分式方程必须要验根．检验增根的方法一般是将变形后所得整式方程的根代入原方程各分式的分母（或代入最简公分母）中去，如果使分母为零的，就是增根，如果不使分母为零的，就是原方程的根.

2. 无理方程

根号下含有未知数的方程叫做无理方程．本章主要研究可化为一元二次方程的无理方程.

解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程（有理方程包括整式方程和分式方程）来解．把无理方程转化为有理方程的常用方法是将方程两边乘方相同的次数，消去方程中的根号，使之成为有理方程．解无理方程因题而异，有的具有特殊解法，有的应用算术根概念，有的用因式分解法，有的用换元法.

解无理方程必须验根．验根的方法是把变形后得到的有理方程的根，代入原方程两边，能使原方程两边相等的，就是原方程的根．否则是增根.

3. 简单的高次方程

未知数的最高次数大于 2 的一元方程，称作一元高次方程．高次方程解法的基本思想是降次，而降次的基本方法是因式分解和换元．双二元方程一般也采用换元法将原方程转化为一元二次方程去继续求解.

三、简单的二元二次方程组

1. 二元二次方程

含有两个未知数，且含有未知数的项的最高次数是2的整式方程，叫做二元二次方程．它的一般式是 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$（a、b、c 不全为零），ax^2、bxy、cy^2 是二次项，dx、ey 是一次项，f 是常数项．

2．简单二元二次方程组的解法

解简单二元二次方程组的基本思想是消元和降次．消元、降次常用的方法有：代入消元法、加减消元法、因式分解法、换元法等，从而使之转化为一元二次方程或二元一次方程组，进而求得原方程组的解．

四、列一元二次方程解应用题的一般步骤

(1) 审题；(2) 设未知数；(3) 列方程（组）；(4) 解方程（组）；(5) 检验，书写答案．

发散点分析

本章发散点是一元二次方程的解法，可化为一元二次方程的分式方程、无理方程，简单的二元二次方程组．本章解方程的思想方法是“换元法”、“消元法”及“降次法”．通过换元法，可使较复杂的方程的求解问题转化为较简单的方程的求解问题．消元法则是把高次方程或多元方程（方程组），通过有关运算转化为一元一次或一元二次方程，达到由难变易的目的．“降次”法利用开方、因式分解逐步“降次”，有时也可与换元法配合灵活运用．特别注意解分式方程、无理方程时要验根，防止增根或遗根．

本章是初中代数重要的一章，它把一元二次方程判别式、根与系数的关系及解方程的四个基本方法紧密地结合起来，可解决一系列关于方程的求根、求值、化简、证明等初等数学问题，随着发散思维方法的运用和拓展，进一步点拨思路，揭示规律，熟练技巧，培养综合运用所学知识的能力，提高分析问题、解决问题的能力，为学习其它数学知识打下坚实基础．现就与发散点有关的问题，分析如下：

一、与一元二次方程有关的几个问题

1．解一元二次方程的基本思想方法是通过“降次”，将它化为两个一

元一次方程

一元二次方程的四种解法里开方法是最基本的方法，配方法与求根公式法是最重要的方法，因式分解法是简便的常用方法．解某些特殊的方程用配方法和因式分解法比较简便．

2．应用根的判别式定理解有关问题

（1）不解方程，判别方程的根的性质

利用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 判别方程有没有实根，如果有实根，实根是否相等．即

$b^2-4ac>0$ 时，方程有两不等实根；

$b^2-4ac=0$ 时，方程有两相等实根；

$b^2-4ac<0$ 时，方程没有实根．

（2）根据方程的根的性质，确定方程中字母系数的取值范围

① 判别式定理的逆定理　实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），如果有两个不相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac>0$；

如果有两个相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac=0$；

如果没有实数根，则 $\Delta=b^2-4ac<0$．

② 利用判别式定理的逆定理根据方程根的性质，求出字母系数的取值范围．

③ 注意二次项系数不为零是方程有两个不等的实根的前提．

（3）判断二次三项式是否是完全平方式．

当 $a\neq 0$，且 $b^2-4ac=0$ 时，则 ax^2+bx+c 就是一个完全平方式．

3．韦达定理的应用

（1）检验方程的根是否正确．

（2）已知二次方程的一个根，可求出方程的另一个根或方程中字母系数的值．

（3）已知一个二次方程的两根或已知两根的和与两根的积，作此方程．

（4）利用韦达定理求一元二次方程根的代数式的值．

（5）不解方程，判别根的性质和符号．

① 因为两根 x_1、x_2 的乘积等于 $\frac{c}{a}$，即 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，故可利用 $\frac{c}{a}$ 判别两实根的符号是否相同及是否有根等于零．即

$\frac{c}{a}>0$ 时，两实根同号；

$\frac{c}{a}<0$ 时，两实根异号；

$\frac{c}{a}=0$ 时，至少有一个根等于零.

② 因为两根 x_1、x_2 的和等于 $-\frac{b}{a}$，即 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，故可利用 $-\frac{b}{a}$ 判别绝对值较大的根是正还是负或者是零. 即

$-\frac{b}{a}>0$ 时，正根的绝对值较大；

$-\frac{b}{a}<0$ 时，负根的绝对值较大；

$-\frac{b}{a}=0$，两根的绝对值相等.

4. 一元二次方程特殊根的运用

(1) 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 有两个实根 x_1，x_2，如果 $a+b+c=0$，则 $x_1=1$，$x_2=\frac{c}{a}$；反之，如果 $x_1=1$，$x_2=\frac{c}{a}$，则 $a+b+c=0$.

(2) 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 有两个实根 x_1，x_2，如果 $a-b+c=0$，则 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{c}{a}$；反之，如果 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{c}{a}$，则 $a-b+c=0$.

5. 一元二次方程两根差的绝对值的应用

如果 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个根，那么其差的绝对值：$|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

6. 两个一元二次方程只有一个公共根

(1) 设公共根为 α，则 α 同时满足这两个一元二次方程；

(2) 用加减法消去 α^2 的项，求出公共根或公共根的有关表达式；

(3) 把公共根代入原方程中的任何一个方程，就可以求出字母系数的值或字母系数之间的关系式.

7. 两个一元二次方程只有一个根互为相反数

方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）与方程 $ax^2-bx+c=0$（$a\neq0$）有两个根互为相反数．因此，要使一个一元二次方程的根改变符号，只需将这个方程的一次项系数改变符号．

8．两个方程只有一个根互为倒数或互为负倒数

方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $cx^2+bx+a=0$（$a\neq0$，$c\neq0$）的两个根分别互为倒数．因此，要使一个一元二次方程的根变为原来各根的倒数，只需将这个方程的二次项系数与常数项互换．

二、解无理方程的方法与技巧

1．换元法　解无理方程的一般方法是将方程两边逐次乘方，使之转化成有理方程求解．但对于特殊的无理方程，就应采用特殊的解法．用换元法解无理方程时，关键是选择辅助未知数，要注意根据方程的结构特点来选择辅助未知数．

2．因式分解法　有些无理方程可以把被开方数分解因式，然后利用提取公因式法分解因式，把方程转化成较简单的方程求解；有些无理方程可经过配方转化为二次三项式的形式，然后利用十字相乘法分解因式，从而把方程转化为较简单的方程求解．

3．运用算术根定义　由算术根的定义知，被开方数和整个根式的值都必须是非负数，因此在解方程时，可以先根据未知数的取值范围来判断方程有无实根；同时，当被开方数可以通过配方写成完全平方时，也可以根据算术根的定义，把它转化成绝对值方程求解．

4．利用比例性质　有些无理方程中，分子和分母中都含有根式，并且分子和分母恰好是两数和与两数差之比的形式，这样的无理方程可以用合分比定理，把无理方程化简，但在应用比例性质时，可能产生增根或遗根，特别要注意验根．

三、简单的二元二次方程组的解法

1．用代入消元法解由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组的解法．

2．用韦达定理法解形如 $\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$ 的二元二次方程组，可将其转化

为求方程 $z^2-az+b=0$ 的两个根.

3. 用因式分解法解由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组.

四、列方程解应用题问题

1. 审题要弄清已知量和未知量，问题中的等量关系；

2. 设元有直接和间接设元，一般是根据列方程解题是否简便而进行选用；

3. 列方程（组）时，方程两边的量要相等，方程两边代数式的单位要相同，一般所说元的个数应与所列方程的个数是相同的；

4. 检验包括判断是否是方程的解和是否符合题意两个方面；

5. 掌握解应用题用的等量关系：如匀速行程：距离＝速度×时间；工程问题；航行问题；混合物问题；增长率问题；十进整数问题. 分析其中的等量关系，可以采用列式法、线段图示法、列表法.

发散思维辅导

一、一元二次方程的解法

例　题

(1) 用开平方法解方程：$ax^2+c=0$（$a\neq0$）；

(2) 用配方法解方程：$x^2+mx=m^2$；

(3) 用求根公式法解方程：$(\sqrt{3}+1)x^2-(\sqrt{3}+7)x+4\sqrt{3}-2=0$；

(4) 用因式分解法解方程：$6(x-1)^2+7(x-1)-3=0$.

解析　(1) 根据平方根的概念，可用开平方法解形如 $x^2=p$（$p\geqslant0$）的方程.

将原方程移项，得 $ax^2=-c$

$\because a\neq0 \quad \therefore x^2=-\dfrac{c}{a}$

当 $-\dfrac{c}{a}\geqslant0$ 时，方程的根是 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

即 $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{-ac}$　$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}=-\frac{1}{|a|}\sqrt{-ac}$

当 $-\frac{c}{a}<0$ 时，方程无实数解.

(2) 当二次项系数为 1 时，应配上"一次项系数一半的平方"，但需注意，配方时应在方程两边同时加上所配的那个数.

将原方程配方，得

$$x^2+mx+\left(\frac{m}{2}\right)^2=m^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$\therefore\quad \left(x+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{5m^2}{4}\quad\therefore\quad x+\frac{m}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}m}{2}$

故 $x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}m$，$x_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}m$

(3) $\because$ $a=\sqrt{3}+1$ 是根式，可在方程两边同乘以有理化因式 $(\sqrt{3}-1)$，得

$2x^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+7)x+(\sqrt{3}-1)(4\sqrt{3}-2)=0$

化简，得　$2x^2-2(3\sqrt{3}-2)x-6\sqrt{3}+14=0$

$\because\quad b^2-4ac=4(3\sqrt{3}-2)^2-8(-6\sqrt{3}+14)=12$

$\therefore\quad x=\frac{(3\sqrt{3}-2)\pm\sqrt{3}}{2}$

故　$x_1=2\sqrt{3}-1$，　$x_2=\sqrt{3}-1$

(4) 将原方程的左边用十字相乘法分解因式，得

$[2(x-1)+3][3(x-1)-1]=0$

$(2x+1)(3x-4)=0$

$\therefore\quad 2x+1=0$ 或 $3x-4=0$　即　$x_1=-\frac{1}{2}$　$x_2=\frac{4}{3}$

题型发散

发散 1　填空题

(1) 已知方程 $3x^2-4x=-1$ 的两根是 x_1 和 x_2，不解方程，代数式 $\frac{x_2}{x_1^2}+\frac{x_1}{x_2^2}=$ $\frac{28}{3}$.