清华大学研究生公共课教材——数学系列

《最优化基础——模型与方法》系列教材

数学规划

黄红选　韩继业　编著

清华大学出版社

清华大学研究生公共课教材—— 数学系列

《最优化基础——模型与方法》系列教材

数学规划

黄红选 韩继业 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以数学规划为对象，从理论、算法和计算等方面介绍了分析和求解常见的最优化问题的一些方法. 全书共分 8 章，其中第 1 章介绍了数学规划的实例、模型以及在分析最优化问题时所涉及的基础知识，第 2 章至第 8 章分别讨论了凸分析、线性规划、无约束优化、约束优化、多目标规划、组合优化和整数规划以及全局优化等七个方面的内容. 此外，书中每章的最后一节给出了一些习题，书末列出了参考文献和索引.

本书可作为应用数学、计算数学、运筹学与控制论、管理科学与工程、工业工程、系统工程等专业的研究生和高年级本科生学习数学规划的教材，也可以作为其他需要利用数学规划方法进行建模和求解实际问题的各个学科领域的科研人员、工程技术人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学规划/黄红选，韩继业编著. —北京：清华大学出版社，2006.3

(清华大学研究生公共课教材. 数学系列)

(《最优化基础：模型与方法》系列教材)

ISBN 7-302-12177-X

I. 数…　II. ①黄…　②韩…　III. 数学规划-研究生-教材　IV. O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 141543 号

出 版 者：清华大学出版社　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：王海燕
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　**印张**：30　**字数**：639 千字
版　次：2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-12177-X/O·507
印　数：1~3000
定　价：45.00 元

序　言

最优化是人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到的问题. 结构设计要在满足强度要求等条件下使所用材料的总重量最轻; 资源分配要使各用户利用有限资源产生的总效益最大; 安排运输方案要在满足物质需求和装载条件下使运输费用最低; 编制生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求, 尽量降低人力、设备、原材料等成本使总利润最高. 可以预测, 随着科学技术尤其是计算机技术的不断发展, 以及数学理论与方法向各学科和各应用领域更广泛、更深入的渗透, 在 21 世纪这个信息时代, 最优化理论和技术必将在社会的诸多方面起着越来越大的作用.

解决实际生活中优化问题的手段大致有以下几种: 一是靠经验的积累, 凭主观作出判断; 二是做试验选方案, 比优劣定决策; 三是建立数学模型, 求解最优策略. 虽然由于建模时要作适当的简化, 可能使结果不一定非常完善, 但是它基于客观数据, 求解问题简便、经济, 而且规模可以很大 (将来会越来越大). 人们还可以吸收从经验得到的规则, 用实验不断校正建立的模型. 随着数学方法和计算机技术的进步, 用建模和数值模拟解决优化问题这一手段, 将会越来越显示出它的效能和威力. 显然, 在决策定量化、科学化的呼声日益高涨的今天, 数学建模方法的推广应用是符合时代潮流和形势发展需要的.

最优化理论、模型与方法所包含的内容很多, 国内已出版了不少教材和专著介绍其各个分支. 但是, 一方面, 近年来发展起来的、有着广泛应用背景的规划模型 (如随机规划、模糊规划等), 以及一些已经为许多人采用、受到广泛关注的优化算法 (如模拟退火算法、遗传算法等) 还缺乏详细和系统的介绍; 另一方面, 一些偏重优化理论和方法的教材, 其要求难以与工科学生的数学知识衔接, 也缺少对于应用来说十分重要的建模过程和软件介绍, 而一些比较通俗的运筹学教材, 则在加强理论基础, 适应学生将来从事科研工作需要上考虑较少. 这套教材试图弥补以上两方面的缺陷, 力求体现下述特点:

1. 内容既包含传统的线性规划与非线性规划等部分, 又纳入有广泛应用前景的随机规划和模糊规划; 在传统内容中, 既注重典型的数学思想和方法的系统叙述, 又引入丰富的建模实例.

2. 数学基础既与工科学生所学知识衔接, 又考虑到研究生阅读文献、从事科研工作的需要, 适当提高理论基础的起点.

3. 对一般教材介绍的诸多算法进行精选, 配合介绍一些应用软件, 并引入近年来迅速发展的若干新算法.

本系列教材将陆续出版, 首批四册为《线性与非线性规划》、《网络优化》、《现代优化计算方法》、《随机规划与模糊规划》.《网络优化》、《现代优化计算方法》、《随机规划

与模糊规划》从 1998 年 6 月开始陆续出版后，已印刷多次. 由于近几年又出现了一些新的算法,《现代优化计算方法》(第 2 版) 进行了适当的修改并增加了部分内容.《线性与非线性规划》现改为《数学规划》, 由清华大学工业工程系黄红选和中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所韩继业编著.

由于水平有限, 书中难免有缺陷和错误, 诚恳希望读者予以批评指正.

《最优化基础 —— 模型与方法》系列教材编委会

2005 年 3 月

前　言

大学之道, 在明明德, 在亲民, 在止于至善.

物有本末, 事有终始, 知所先后, 则近道矣.

——《大学》

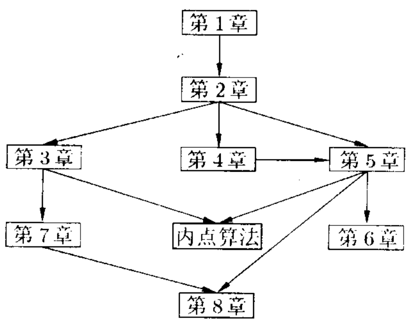
在今天称为 "大学" 的地方要探求的是一种大学之道. 本书作者想要传播的是一种数学规划之道, 这种 "道" 存在于我们若干年来的所观、所学、所想、所感乃至所悟之中. 数学规划俗称最优化, 它所追求的是一种 "至善" 之道, 从数学的角度表达了人们处理实际问题时所遵循的一种理念, 即利用数学的语言将实际问题形式化, 获得一个抽象的数学问题, 然后设计一种合适地求解数学问题的算法, 并且在分析算法性能的基础上, 将数学问题的求解结果与实际问题的演化状况进行比较分析, 验证这种数理分析的合理性与正确性. 因此, 我们说: *数学规划首先是一种理念, 其次才是一种方法*. 也许在实现这种理念的过程中, 由于主客观条件的制约, 我们需要这样或者那样折中的、近似的做法, 但是后者永远无法替代最优化理念所蕴涵的追求卓越的精神.

数学规划 (最优化) 作为一门学科孕育于 20 世纪的 30 年代, 诞生于 20 世纪 40 年代第二次世界大战弥漫的硝烟中, 以线性规划模型和单纯形算法的出现为标志. 作为一种优化方法或者体现的现象, 可以上溯到很久以前, 比如: Cauchy 提出的沿着负梯度方向寻找极小点的方法 (最速下降法); 求解等式约束优化问题的 Lagrange 方法; Leibniz 发表的第一篇关于微分学的论文探究的是一种求极大与极小值和求切线的新方法; Fermat 在研究求极大和极小的方法时发现了一元函数取极值的必要条件, 等等. 此外, 在我国古代, 人们为了建立精确的天文历法, 不能不涉及特定的极值问题, 比如, 郭守敬对 "月离迟疾"(月亮运行的最快点和最慢点) 以及月亮白赤道与太阳黄赤道交点距离的极值 ("极数") 的计算; 二十四节气中 "夏至" 和 "冬至" 实际上是描述了一年中太阳光直射点南北移动的一种极端状况. 如果注意到自然界中广泛存在的优化现象, 比如, 物理系统能量的变化, 奔腾的江河, 光线的传播, 生物的进化, 等等, 那么我们可以说, 数学规划 (最优化) 之道与天地共存、与日月同辉、与人事相伴.

本书以数学规划中常见的最优化问题为出发点, 从理论、算法和计算等方面介绍了分析和求解线性规划、无约束优化、约束优化、多目标规划、组合优化与整数规划、全局优化等问题的一些基本方法. 全书共分 8 章: 上述 6 类问题各对应一章, 另外有两章分别介绍了数学预备知识和最优化理论基础 (凸分析). 具体地说, 各部分涉及的内容如下:

第 1 章是从实例与模型的角度, 介绍了数学规划研究的问题的特点, 并且简要地介

绍了分析最优化问题时在数学方面所涉及的基础知识. 第 2 章讨论了数学规划的理论基础 —— 凸分析理论, 涉及仿射集、凸集和锥、多面体的面、凸函数等基本概念, 以及凸集分离定理、择一定理、多面体表示定理、凸函数的判定条件等基本性质. 第 3 章介绍了线性规划的基本定理和单纯形算法, 在讨论线性规划最优性条件的基础上, 介绍了线性规划的对偶理论以及对单纯形算法的改进和推广策略, 包括退化现象与避免算法循环的方法、原始-对偶算法、分解算法和灵敏度分析. 此外, 本章也讨论了典型的、具有多项式时间的求解线性规划的内点算法. 内点算法是基于非线性优化策略的求解线性优化问题的方法, 所以它涉及非线性约束优化的内容, 包括最优性条件和罚函数的思想. 由于这类算法的应用对象是线性规划问题, 所以我们把这部分内容列入线性规划部分. 第 4 章讨论了无约束优化问题的最优性条件、关于算法收敛性的一般理论以及常见的求解无约束优化问题的算法: 最速下降法、牛顿法、共轭梯度法以及拟牛顿法. 第 5 章分析了约束优化问题的最优性条件、对偶理论以及求解二次规划问题的方法. 在此基础上, 介绍了一些典型的分析、求解约束优化问题的算法: 可行方向法、序列无约束化方法和逐次二次规划法. 另外, 从约束优化的角度, 讨论了一种求解无约束优化问题的信赖域法, 目的是介绍与线搜索优化策略不同的另外一种基于信赖域搜索的优化策略. 第 6 章在介绍向量集的有效点和弱有效点的基础上, 引入了多目标规划问题的最优解的概念, 并讨论了最优解的性质以及基于单目标化策略、求解多目标规划问题的方法. 第 7 章分析了常见的组合优化问题 —— 网络流问题和匹配问题, 其中这些网络流问题的数学结构可以借助于线性规划模型来描述. 然后, 在讨论整数规划的基本性质的基础上, 分别介绍了求解 (线性混合) 整数规划问题的割平面法、分支定界法和分解算法. 第 8 章着重介绍了全局优化的基本概念和性质、常见的全局优化模型以及三类典型的分析全局优化问题的方法: 外逼近方法 (割平面算法)、凹性割方法和分支定界法. 本书各章节内容之间的关系, 可以用下面的图形简要地说明.



此外, 本书在每章的最后一节给出了一些习题, 书后还列出了参考文献和索引.

值得说明的是, 关于各章节内容的组织, 我们遵循着一个基本的逻辑关系, 即将数学

规划各部分内容的基础设定为凸分析理论, 在此基础上分别讨论线性优化、非线性优化以及它们的推广形式. 凸分析理论的核心是凸集分离定理、择一定理和多面体表示定理. 特别地, 我们将线性规划的基本定理看成多面体基本性质的一个推论. 关于第 3 章中线性规划最优性条件, 我们是从择一定理的角度给出证明, 而不是从单纯形算法的判优规则出发给出的.

本书是在清华大学数学科学系《最优化方法讲义》的基础上经过修改而撰写成的. 在清华大学 2001—2002 学年度的春季学期, 数学科学系开设的优化课程中包含 "数学规划" 和 "最优化方法", 前者的选课对象为数学系三年级本科生、计算机系二年级本科生以及其他系的部分学生; 后者的选课对象为非数学系的研究生, 包括硕士生、博士生, 也有部分校外单位的听课生. 来自各方的学生被编成两个大班, 其中一个大班由中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所的韩继业教授负责; 另一个大班由当时在数学科学系工作的黄红选博士负责. 关于两个大班教学情况以及作者关于课程建设设想的初步总结, 形成了上面提到的讲义. 值得指出的是, 在撰写讲义的过程中, 早些年的授课经历 (教学资料), 特别是清华大学应用数学系 (数学科学系的前身)1995 级本科生数学规划课程的教学、关于线性规划内点算法的研究与总结材料等, 对于讲义的形成都起到重要的作用. 印刷这本讲义的首要目的是为了方便 2002—2003 学年度秋季学期的 "最优化方法" 课程教学, 使得同学们有一本与课程讲授内容相近的参考资料, 以便更好地掌握常用的最优化方法, 理解数学规划的原理. 《最优化方法讲义》出版后, 先后多次应用于清华大学研究生 "最优化方法" 课程和数学科学系 "数学规划" 课程的教学实践, 在此基础上形成了本书的基本结构和内容, 其中多目标规划和全局优化两章的内容曾作为教学材料用于数学科学系四年级本科生专题课的教学.

多年来, 在数学规划 (最优化) 的课程建设、《最优化方法讲义》的使用以及本书的撰写过程中, 有许许多多的热心人给予作者很大的帮助, 借此机会, 作者对他们表示衷心的感谢! 特别要感谢清华大学数学科学系的姜启源教授、谭泽光教授、韩云瑞教授、邢文训教授、谢金星教授、李津教授等多年来给予作者的关心和帮助! 感谢清华大学热能系张毅同学、数学科学系孙杨同学担任助教期间先后为数学规划 (最优化) 课程建设付出的辛勤努力! 我们还要感谢为此书出版给予支持的清华大学出版社和清华大学工业工程系. 最后, 我们要感谢自己的亲人多年来对作者的关心、照顾和鼓励!

衷心地祝愿所有的读者在翻阅此书时愉快, 并有收获!

黄红选　韩继业

2005 年 8 月于北京

目　　录

第1章　引　　论

1.1　学科简介

数学规划 (Mathematical Programming) 是应用数学学科的一个重要分支, 并非指某种特定的面向数学问题的计算机编程技术. 该术语出现于 20 世纪 40 年代末, 是由美国哈佛大学的 Robert Dorfman 最先使用的, 其初始含义具有相当的包容性, 从数学的角度表达了人们处理实际问题时所遵循的一种理念. 这种理念可以概括为如下三个基本方面 (参见图 1.1):

(1) 将实际问题形式化, 即利用数学的语言和其他学科的知识, 把实际问题抽象成一个数学问题. 这个过程一般称为数学建模, 所获得的数学问题相应地称为数学模型.

(2) 求解实际问题形式化后得到的数学问题 (模型). 通常需要设计一种合适的求解问题的算法, 并且分析其性能.

(3) 将数学问题的求解结果与实际问题的演化状况进行比较分析, 验证数学模型的合理性与正确性.

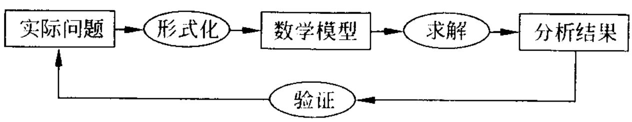


图 1.1　数学规划的基本理念

由于受到当时社会和科学发展状况的限制, 真正地推广和实现上述理念并不容易, 所以数学规划的含义在学科发展过程中有所限制. 现在, 数学规划处理的数学模型通常是寻找一些 (决策) 变量在某种范围内的取值, 使得一个或多个既定的目标达到最优状态 (极大或者极小, 或者处于某种妥协状态). 因此, 人们常常把数学规划通俗地称为最优化 (optimization).

数学规划 (最优化) 问题的来源十分广泛, 涉及科学、工程、经济、工业和军事等领域. 下面列出的问题就是人们经常遇到的最优化问题:

(1) 在金融投资中, 如何设计比较好的证券组合或者投资项目组合, 以便在可接受的风险限度内获得尽可能大的投资回报?

(2) 在产业结构调整、人员的优化组合或者多品种商品的生产计划与调度过程中, 如何有效地分配有限的资源, 以便在特定的空间和时间范围内谋求最大的经济效益?

(3) 在工程设计中, 如何选择恰当的参数, 使得工程设计方案既满足实际要求, 又能够降低工程的造价?

(4) 如何寻找飞行器或者机械手的最优轨迹? 比如: 在世界新军事革命的浪潮中, 导弹防御系统的开发和部署将成为国家之间综合国力竞争的一部分, 而这种系统的有效性首先表现在能否在敌方导弹到达己方某一重要区域之前, 对目标的轨迹进行准确地跟踪和预测, 并且引导拦截器将其摧毁?

(5) 如何设计汽车或者飞机的最佳外形, 既保证其运动的稳定性, 又要减少其运动的阻力, 甚至还需要满足隐身性要求?

(6) 如何控制一个化学过程或者机械装置, 既优化其性能, 又保证其满足稳健性 (鲁棒性) 要求?

从历史的角度来看, 最优化也是一个古老的话题. "田忌赛马" 这个典故就讲述了一个发生在我国战国时期, 在跑马比赛中如何采取策略取胜的故事 (它涉及一个对策论 (最优化) 问题). 古代和中世纪的中国学者在天文历法研究中曾涉及天体运动的不均匀性和相关的极值问题, 如郭守敬在《授时历》(1280) 中求 "月离迟疾"(月亮运行的最快点和最慢点)、求月亮白赤道与太阳黄赤道交点距离的极值 (郭守敬称之为 "极数") 等问题 [47].

在西方, Fermat 在 1637 年发表了 "求极大和极小的方法", 其中包含有 Fermat 定理的结论. Newton 和 Leibniz 发明的微积分为求解一大类单变量极值问题提供了通用的工具. 有趣的是, Leibniz 在 1684 年发表的第一篇微分学论文被定名为 "一种求极大与极小值和求切线的新方法" . 后来, Euler, Poincare 和 Hilbert 将 Fermat 定理推广到处理多个变量, 甚至无穷个变量等情形的问题, 以及求特定的条件极值问题. 现在, 人们已经知道, 许多基本的运动定律能够用 Fermat 定理来描述. 特别地, Fermat 定理的变形之一: "最小作用原理" 使整个牛顿力学的基本方程可以看成 Fermat 定理的推论, 即刻画了作用量的导数为零 [56]. 另外, Euler, Lagrange 等关于变分法的工作也与最优化有很紧密的关系. Lagrange 乘子法迄今仍是数学规划中处理约束极值问题的重要方法之一. Fourier 在 1826 年的工作曾涉及后来发展起来的线性规划理论的核心 —— 线性不等式组的研究. 1847 年 Cauchy 研究了函数值沿什么方向下降最快这个问题, 提出了求解无约束优化问题的最速下降法.

值得指出的是, 在自然界中, 也存在着许多优化现象. 例如: 物理系统常常向最小能量的状态演化; 江河中的流水是沿着势能最速下降的方向流动的; 在封闭的化学系统中, 分子之间相互作用直到它们的电子的总体势能最小; 光线从一点到另一点传播所经过的路径使得它所需要的传播时间最短, 由此可以推断, 在两种均匀介质的交界面处, 光线的传

播必须满足折射定律.

前面提到的只是从古至今人们接触过的一些优化现象, 并没有形成一门科学. 作为一个学科分支, 数学规划出现于第二次世界大战前后. 1939 年前苏联的 Kantorovich 出版了著作《生产组织与计划中的数学方法》, 建立了线性规划模型, 用来解决下料问题和运输问题, 这标志着线性规划的诞生 (但是 Kantorovich 的工作在前苏联是被人忽视的). 在英美等国家, 数学规划的基础分支 —— 线性规划, 则是为了满足第二次世界大战中特定的军事需求而逐渐发展起来的. 在 1947 年, Dantzig 正式提出了线性规划的数学模型, 并且提出了求解线性规划的单纯形算法. 他当时是联邦空军审计部的一名数学顾问, 开发了一个数学工具, 用来制订军队的训练、部署、后勤保障的方案. 有趣的是, Dantzig 用了近一年的时间才使自己以及他的同事彻底地明白单纯形算法的实际威力所在. 由于空军的计划问题可以用一个不等式组来描述, Dantzig 就将他的论文题目取为 "线性结构的规划 (programming in a linear structure)". 线性规划这一名称则是由美国的 Koopmans 和 Dantzig 于 1948 年夏天参观兰德公司期间提出的. 在 1949 年, 关于数学规划的第一次会议在美国的芝加哥大学举行, 会议的组织者 Koopmans 后来主编了一本书:《生产与分配的活动分析 (Activity Analysis of Production and Allocation)》, 这对数学规划的进一步发展产生过重大的影响.

第二次世界大战后, 线性规划方法迅速地向其他的领域渗透, 它能够解决的典型问题有: 生产组织问题、运输问题、下料问题、营养配餐问题以及国民经济计划问题等. 在此基础上, 数学规划的许多其他分支也逐渐地发展起来. 现在, 以数学规划为理论核心的*运筹学* (operation research) 对管理科学、工业工程和系统工程等学科的发展起到十分重要的推动作用. 其实, 在 1947 年以前, Koopmans 就指出, 线性规划为古典经济学理论的研究提供了极好的数学框架, 并进行了与经济学有关的研究. 1975 年瑞典皇家科学院将 Nobel 经济学奖颁给了 L.V. Kantorovich 和 T.C. Koopmans, 原因是他们创造了线性规划方法, 并成功地将其应用于经济学领域, 为经济学的发展作出了卓越贡献. 大约 20 年之后, Nobel 经济奖 (1994 年) 又授予了三位对策论专家, 这推动着对策论的研究进入了新的高潮.

与线性规划相对应的 "*非线性规划*" 一词是由 Kuhn 和 Tucker 在 1950 年最先提出的 [26]. 非线性规划的研究也因为 Kuhn-Tucker 条件的出现和计算机技术的进步逐渐地活跃起来. 到 20 世纪 60 年代, 人们在线性规划的第一次研究热潮过后转向了对非线性规划的研究, 提出了一系列有效算法. 虽然人们对特殊的非线性规划问题的探讨早已开始, 例如: Sylvester 在 1857 年提出了寻找平面上包含 N 个点的最小圆的问题 [33], 但是, 只有在计算机出现导致计算技术的革命性进步之后, 人们才可能通过求解非线性方程组的途径推动非线性规划的研究.

在数学规划的发展过程中, Edmonds 在 1965 年提出的*优良算法* (good algorithm) 这一概念曾产生过重要的影响 [6,42]. 单纯形算法在实际应用中是比较有效的, 那么它是否是