大專用書

最佳控制

馬雲龍著

中央圖書出版社出版

大專用書

最佳控制

馬雲龍著

中央圖書出版社出版

序　言

自從自動控制發展以來，所謂的最佳控制的操作應是其進行目標。最佳控制原則雖然是不能變換，但其演算方法種類甚多。此等計算方法雖然是各有其歷史淵源，但近年來其進展速度並沒有發生甚大的幅度。

本書以空間狀態法爲重點，首先討論其基本概念，在第二章中特別的以重點式的提示出狀態空間之系統方程式以及其有關的數學模型所需要的Z－變換法。

狀態空間系統的基本解法是解此有關的系統方程式，其要點就是求解換算値而演算其轉移矩陣，在第四章內提出此等有關演算的方法。第五章是狀態空間轉移演算法，在此例擧甚多例題以逐算方法加以演算並示出其結果。

利用變數式微分演算雖然甚是古老，但近年來利用此種方法的演變曾提出甚多類似原則方法，雖然名稱不一但其目的是完全相同，第六章的內容即爲此種變數式微分計算法。

第七章爲極大原則，此法雖然常用於太空軌道以及運行之演算，但在普通最佳問題中亦有其獨到之處。

動態規劃法爲美國各界所喜愛，此法對於工廠各種因素的最佳設計有其獨到之處，第八章中例擧甚多例題並加以實際數値說明。

第九章爲二階系統方程的演算以及其最佳估計。本書請敎於美國佛羅里達州立大學竇祖烈敎授所著“近似控制理論”者甚多，並煩助理人員等繪圖和繕寫特此銘謝之。

中華民國六十三年八月　　　　馬　雲　龍

識於國立台灣大學

最 佳 控 制

目 錄

第一章 緒　　論

第一節 介　　紹

十九世紀工業革命以來，“效率”所謂的“**高能率**”在科學方面以及應用科學方面，視爲重要而必然的問題。工業生產製造的操作由手動逐漸變化爲自動機械化，二十世紀以來，由於速度需要幅度增高，人工控制操作已多被淘汰，逐漸的由電子設備自動控制代替之。大量生產的品質管制，武器準確度的增大，以及月球登陸和火星探險等太空方面的顯著進步，皆爲自動控制貢獻的結果。由於**反饋作用**(Feedback control)之應用不但增進了該系統的**穩定性**(Stability)，更能縮短控制的操作時間。反饋控制不但增高了操作的精確性，而且其應用範圍是相當的普遍，如以動物本身言之，眼瞼的張開和閉合作用恰和外部光線的輸入以及腦中樞的指令成一自動控制的**方塊圖形**(Block diagram)。

如圖1-1所示者爲動物瞳孔作用的方塊圖形，外激光線(Stimulus light)刺激瞳孔(Pupil)，經視網膜(Retina)的檢定作用該光

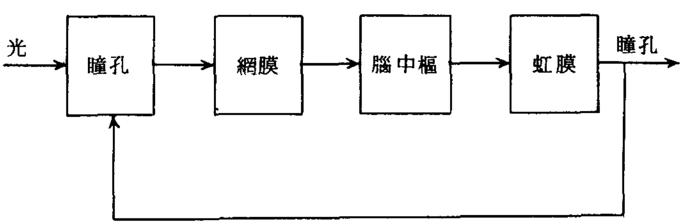

圖1-1 瞳孔作用方塊圖

線的强弱傳至腦中樞（Mid-brain），由其判斷指令而下達命令至虹膜（Iris），此膜恰如開閉瞳孔的馬達亦可名之爲**瞳孔馬達**（Pupillo motor）而可控制瞳孔直徑（Pupil diameter）的大小。由於光線的過强可使瞳孔縮小，瞳孔一旦經縮小作用後，其直徑的大小反饋至外界光線處做成相互比較，是否其縮小直徑適合，若由經縮小的瞳孔而進入網膜的光束，正好適合於腦視神經的感觸，則其相互比較而得的**誤差**（Error）應爲零。此時瞳孔之伸縮作用則做暫時之停止，此種動作時間大約有千萬分之一秒而已。

應用於機械方面，如太空船的啣接作用以及其高度控制等亦須做反饋控制，使其啣接便利以及保持欲求的高度。如圖 1-2所示者爲太

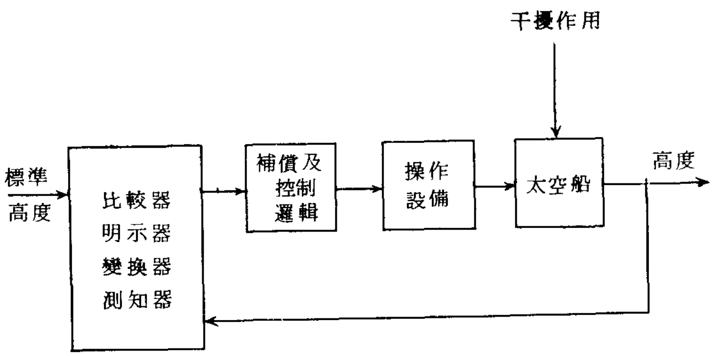

圖 1-2 太空船高度控制方塊圖

空船高度控制之方塊圖形，理想的希望高度經指令後變換爲**比較器**（Comparator）內所需要的**基本訊號**（Reference signal），和太空船的實際高度相比較後，產生**誤差訊號**（Error signal），將此訊號送入**控制邏輯設備**（Control logical device）及**補償設備**（Compensator）中計算審定後，送入**操作設備**（Actuator）則可變換太空船應變的高度。圖中的**檢定設備**（Evaluator）內應包括甚多的作用，如比較器，**明示器**（Interpreter），**變換器**（Converter）及**測知器**（Sensors）等，其外對太空船還可能有一種**干擾作用**（Disturbance torque），此作用應隨其航行空間的不同而相異。太空船昇高至任意

高度時，其反饋訊號經顯示器測知後，由變換器變換成電的訊號，再以明示器加以解釋及整頓後，傳送至比較器，在此和理想希望高度(即標準高度)值相比較而產生高度誤差。此誤差訊號變動頻繁爲防止其過渡現象的異常影響的產生及增進，其穩定度得考慮用一種補償設備彌補。誤差訊號的絕對值或**振幅**(Amplitude)甚微，必需用**放大設備**(Amplifier)放大後，並將應變動的高度值以邏輯電路指示後，再操縱操作設備。此操作設備應爲**驅動機械**(Driving machine)如**脈衝電動機**(Pulse motor)或**伺服電動機**(Servo motor)等等。此等電動機或馬達的操作，能使太空船上裝備的噴射燃料點燃而向標準高度昇進。另外的干擾作用或**干擾轉矩**(Disturbance torque)是由太空船在進行中的慣量等的原因而產生。當實際高度和標準高度相等時，由檢定器相比較而得的誤差訊號應爲零。因之，太空船噴射作用停止，但在此時是否此太空船以其慣性繼續向高處昇進，最後再度產生誤差訊號，而又使太空船噴射作用開始，如此情況則成一種進行中的振盪作用，此種現象在事先應該估計，並加以抵消。太空船上的燃料是有限量的，若設計不良或指令不善，則燃料用盡，最後變成一種呆體，可能離開其航線遠行而去，導至於失却和地面的連絡，或墜毀消失。

以上兩種例子可知其基本觀念是雷同，至於太空船上的各種設備，亦比照動物的腦中樞和神經系統的構想而以近代的電子精密設備模倣製造，其效率當然比不上動物各系統的精確，但科學進步之迅速亦漸漸的在縮短其間隔距離。將這些設備合併之就是一部實際應用的電子計算機，其聯關設備就是訊號發生器以及驅動設備等等。由上述可知所謂的近代**最佳控制**(Optimal control)，就是如何利用電子計算機使其操作結果呈最佳作用。實際應用比數理上的演算及估計更爲重要問題，本書就是介紹最佳作用的最佳數理理論。

第二節　向量矩陣微分方程式
(Vector-matrix differential equation)

討論某問題的最佳作用必定要利用**數學模型**(Mathematical

model）演算，其中有甚多**變量**（Variable）可提示之如下：

(1)**獨立變量**（Independent variable）或**參考變量**（Reference variable），此目的是做指令用的又可稱爲**指令變量**（Monitoring variable）或稱爲**控制變量**（Control variable）。

(2)**狀態變量**（State variable），又稱爲**生產變量**（Product variable），此爲在系統運用過程中而應發生的變量。

(3)**從屬變量**（Dependent variable）亦可稱爲**測知變量**（Meassurement variable）是在運用過程中而測量每段狀態量的測知值。

(4)**干擾變量**（Disturbance variable）爲在運用過程中由非能控制的環境而產生的變量，如**熱雜音**（Heat noise）等。

今例舉一簡易方塊圖形如圖1-3，此爲二階式程序系統的方塊圖

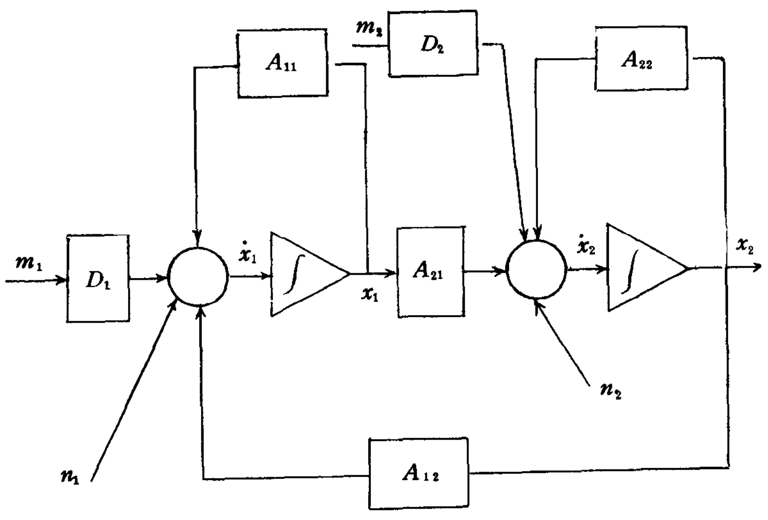

圖 1-3 二階程序系統方塊圖

形，若劃成多段式亦可，但其分析結果是相同。m_1 及 m_2 爲控制量，x_1 及 x_2 爲狀態量，n_1 及 n_2 爲干擾量，“ ∫ ” 符號的三角形表示**積分器**（Integrator），則由圖可得下式，即

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + D_1m_1 + n_1$$
$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + D_2m_2 + n_2 \quad (1\cdot2\cdot1)$$

(1)式可示之如矩陣，則得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n_1\\ n_2\end{bmatrix} \quad (1\cdot2\cdot2)$$

(2)式亦可用於多段程序系統。但此式常用下列型式表示，即

$$\dot{X} = AX + Dm + n \quad (1\cdot2\cdot3)$$

式中 A 表示**係數矩陣**（Coefficient matrix），D 爲**控制矩陣**(Control matrix or driving matrix）及 n 爲**干擾矩陣**（Disturbance matrix）。

(3)式亦可用**函數式**（Functional equation）示之如

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} = f\,[\,X(t),\,\overline{m}(t),\,t\,] \quad (1\cdot2\cdot4)$$

(4)式中之 t 應爲時間

以上所述各式在最佳控制問題的演算中應算之爲一種**拘束條件**（Constrained condition），另外者有其他種的拘束條件時，可示之如下：

$$g(m) \leq 0 \quad (1\cdot2\cdot5)$$

關於最佳原則之演算法得在後章中討論，本節所欲述者爲如何形成向量行列微分方程式。今試舉一例；關於航機的飛行控制問題，其方程式之形成可由空氣動力學及慣量有關式分析。如圖1-4所示者爲航機之着陸圖形。

V……着陸速度，單位以 $^{ft}/_{sec}$ 計之，應取定值。

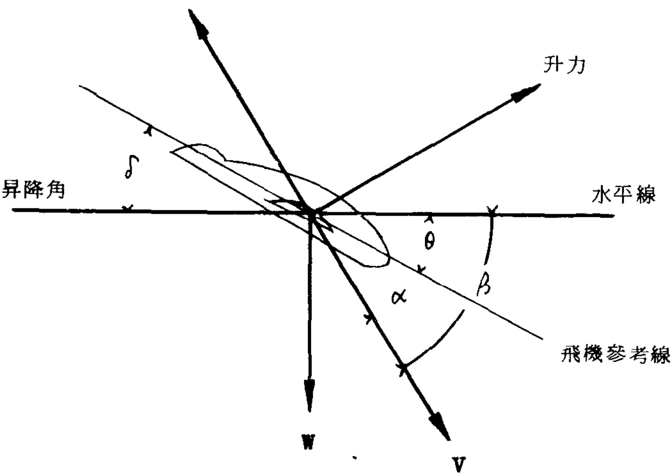

圖 1-4 著陸圖形

β……滑翔角度(Glide-path angle),以弧度計之。

θ……傾向角度(Pitch angle),以弧度計之,此爲航機體下降時和水平線所成之角度,此時機體的方向稱爲**航機本線**或**飛機參考線**(Airplane reference),應爲着陸速度方向和水平慣性方向之合成方向。

δ……昇降角(Elevator deflection),以弧度計之。

h……航行高度(Altitude),以 ft 計之。

利用力和力矩(Force & Moment)公式可得

進行力=下降力－昇阻力　即

$$Ma = MV\frac{d\theta}{dt} = C_L\alpha - C_F\delta \tag{1·2·6}$$

式中 M 爲航機之質量,C_L 爲下降力常數,C_F 爲昇阻力常數。

又由力矩等於扭轉力矩減去阻拖力矩之原則，得

$$T\frac{d^2\beta}{dt^2}=C_T\delta-C_M\alpha-C_q\frac{d\beta}{dt} \qquad (1\cdot2\cdot7)$$

式中之 C_T，C_M，C_q^q 各為有關的力矩常數。

$$\alpha=\beta-\theta \qquad (1\cdot2\cdot8)$$

今將(6)，(7)及(8)三式合併，以 θ 及 δ 示之，則得

$$\frac{d^3\theta}{dt^3}+2\xi w_0\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\frac{d\theta}{dt}=KT_0\,\omega_0{}^2\frac{d\delta}{dt}+K\omega_0^2\delta \qquad (1\cdot2\cdot8)$$

上式中各項的係數為適合於一般特性式而選用的，其名稱可示之如下；

ξ……瞬間阻尼因數（Short-period damping factor）。

ω_0 …瞬間共振頻率（Short-period resonant frequency）。

K……瞬間增益常數（Short-period gain constant）。

T_0 …航線時間常數（Path time constant）。

次之求出傾向角度 θ 和高度 h 之關係式，即

$$T_o\frac{d^2l}{dt^2}+\frac{dh}{dt}=V\theta \qquad (1\cdot2\cdot9)$$

再定昇降角 δ 在此瞬間內為定值，而高度 h 的加速度變動視之為零，今將(9)式代入(8)式中可得

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4}+2\xi\omega_0\frac{d^3h(t)}{dt^3}+\omega_0{}^2\frac{d^2h(t)}{dt^2}=KV\omega_0^2\delta(t) \qquad (1\cdot2\cdot10)$$

今設 $x_1=h$，$x_2=\dot{x}_1=\dot{h}$，$x_3=\dot{x}_2=\ddot{h}$，$x_4=\dot{x}_3=\dddot{h}$

$m=\delta$，"$\dot{h}$" 者表示高度的一階微分，"$\ddot{h}$" 和 "$\dddot{h}$" 各表示二階和三階微分，將上述者和(10)式整頓之，得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\end{aligned} \qquad (1\cdot2\cdot11)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\omega_0^2 x_3 - 2\xi\omega_0 x_4 + K_1 m$$

但 $K_1 = KV\omega_0^2$

將上式以矩陣表達，則可得所謂的向量矩陣微分方程式。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_1 \end{bmatrix} \quad (1\cdot2\cdot12)$$

或

$$\dot{X} = AX + Dm \quad (1\cdot2\cdot13)$$

x_1，x_2，x_3 及 x_4 皆稱爲狀態量。A是狀態量的係數矩陣，應爲一方型矩陣（Square matrix），而D應爲列型矩陣（Column matrix）。

上列各因素常取決於拘束條件，如傾向角 θ 得有一定之限度等等。δ 角亦要受此限制。如：

$$\delta \leq \theta \leq 10^\circ \quad (1\cdot2\cdot14)$$

第二章　數學基礎

第一節　狀態空間之介紹
(Introduction to state space concepts)

在最佳控制系統發展的過程中，利用數學模型之助，使其做進一步的進展應算爲 1955 年以後的一大改革。利用狀態空間的新觀念，不但有助於最佳控制之設計，同時亦可改進運用系統之原則，在古典式方法中，如**頻率反應法**(Frequency response method)以及**軌跡法**(Root locus method)等不能做到的問題，諸如**評價特性**(Performance characteristics)等，即此評價函數的利用在狀態空間可輕易的推出最佳控制作用。

控制生產程序中，包含有**顯示設備**(Sensor),**控制設備**(Controller)，**操作設備**(Actuator)以及工廠的**生產設備**(Plants) 等，其主要目的是在控制工廠的生產設備，使其品質優良。如欲使此工廠生產工具可達成完美的操作結果，得有一**最佳控制法則**(Optimum control law),此法則很簡單，就是在一定的拘束條件下，使其評價函數(Performance index)爲極小的簡易原則。所謂評價函數者，就是**操作所需用的價值**(Cost index of performance), 亦可能用**標準操作**(Ideal performance)的**偏差值**(Measure of deviation)表達。

一般言之工廠生產設備的最佳操作皆用電子計算機控制，如圖2-1 所示，則爲利用電子計算機做工廠生產控制的簡易圖形。將工廠生產結果或操作結果變換成電的訊號加入電子計算機中，使其和標準者相比較之，此電子計算機的功能應有：(1)由生產設備所供應的資料

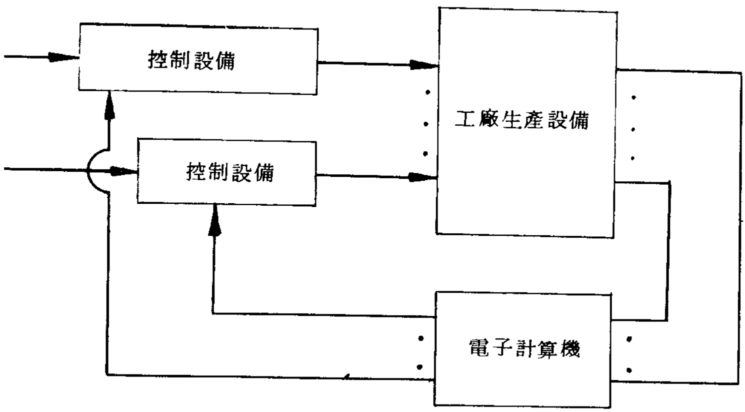

圖 2-1 生產控制簡易圖形

，經收集後演算而發出**最佳運轉指示**（Optimal operational guide）；(2)將最佳運轉指示如何有效的傳送給控制設備，使之成**指令訊號**（Command signals）。綜合上述，可知利用電子計算機控制的目的，就是可以增高**利潤**（Profit）和**效率**（Efficiency）。

不管控制生產程序中其被控制者是任何的生產設備，諸如**熱鍋爐**（Heat furnace），**化學反應器**（Chemical reactor）甚至於**飛行機體**（Space craft）等，皆可將其全部系統用一微分方程式表示，經常皆用**n階微分方程式**（nth - order ordinary differential equation）示之。此式亦可分之爲線型微分方程式（Linear differential equation）之別，其分別可由系統中的各因素而決定之。

在序論中第二節雖然論及狀態變量但只是初步而已，鑑於狀態變量的重要性，在本章中詳述其有關的各定理。所謂的狀態量就是將n階微分方程式以微分階數的次序定出之量，今以 x_1，x_2，……，x_n 示之，此n個狀態量亦可視爲向量X的n個成分（n Components），則此向量X可稱爲狀態向量（State vector）。狀態空間就是以

x_1，x_2，……，x_n 爲座標的 n 因次空間（n—Dimensional space）

今考慮一 n 階微分函數，x 頂上的 (n) 符號表示 n 階微分的意思

$$\overset{(n)}{x}=f(x,\dot{x},\cdots\cdots,\overset{(n-1)}{x},m,t) \tag{2·1·1}$$

設之 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}$，……，$x_n=\overset{(n-1)}{x}$，將 (1) 式展開之如第一章第二節所述者，則得

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,m,t)\end{array}\right\} \tag{2·1·2}$$

(2)式中構成 n 個一階普通微分方程式（First-order ordinary differential equations），其一般式可示之如：

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,m,t)，但\ i=1,\cdots\cdots,n \tag{2·1·3}$$

以上所述式中只有一個控制量 m，若有甚多控制量時，其一階微分方程函數可爲，

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n;m_1,m_2,\cdots\cdots,m_r;t),$$

但 $\quad i=1,2,\cdots\cdots,n$ (2·1·4)

今考慮測知量 Y，此測知量的因次不一定和狀態量者相同，如圖 2-2 所示者爲具有 j 個測知量的控制系統之方塊圖形，則

$$y_i=g_i(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n;m_1,m_2,\cdots\cdots,m_r;t)$$

(2.1.5)

但 $\quad i=1,2,\cdots\cdots,j$；而 $n\geq j$

(4)及(5)式者以函數式示之，則得

$$\dot{X}=f(X,m,t) \tag{2·1·6}$$