

二等三角网平差 (按逐渐趋近法)

П. А. 盖达耶夫 著
М. П. 佛 明

李锡泉译 方佩竹校

中国工业出版社

本书系根据苏联测绘出版社1960年于莫斯科出版的“二等三角网平差（按逐渐趋近法）”译出。

本书内容主要阐述在大規模二等三角网的平差中，如何合理的分区、分组以及按逐次趋近法进行平差的方法和程序，并结合实例予以说明。本法也适用于較大的三等三角网的平差。

本书可作为測量内业計算人員的参考书。

本书由李錫泉同志翻譯，由方佩竹同志校訂。

П. А. ГАЙДАЕВ И М. П. ФОМИН
УРАВНИВАНИЕ
Триангуляции 2 класса
Приближением
Издательство геодезической литературы
МОСКВА 1960

* * *

二等三角网平差

（按逐渐趋近法）

李錫泉譯 方佩竹校

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河國家測繪總局）

中国工业出版社出版（北京德勝門外大街10号）

（北京市書刊出版事業許可證出字第110号）

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $1^{5/16}$ ·插頁2·字數32,000

1962年11月北京第一版·1962年11月北京第一次印刷

印數001—791·定价(10—6)0.32元

*

統一書号：15165·1858（測繪-34）

原 序

本书所述三角測量平差的方法乃是 П. А. 盖达耶夫的建議。在探討該建議时，除原作者外还有 P. С. 古捷尔、И. П. 耶罗費耶夫、Ю. Г. 米列夫斯基、Я. Г. 穆拉略夫和 М. П. 佛明等人参加。当时除古捷尔对分組趋近法的理論作了詳尽的数学分析之外，还参考了苏联大地測量工作者在平差計算方面的丰富經驗。

研究實驗和生产試驗表明，所建議的方法确有甚大的經濟价值，它在实践中有足够的严密性，并且可以有成效地应用于大規模二等三角网的平差和較大的三等三角网（多于 5—10 个点）的平差。

作者認為必須向 П. А. 拉林表示感謝，由于他所提出的宝贵意見，使本书的初稿得以改善，此外还应向 М. Б. 薩尔日茨卡雅、З. И. 卡尔塔舍耶娃和 Р. П. 查捷耶娃表示感謝，由于她們参加了拟定計算过程和平差示例的工作。

目 录

原序

§ 1. 本法的实质	3
§ 2. 平差的程序	15
§ 3. 在不同情况下应用本法的特点	33

附录

附录 1.	39
附录 2.	40
参考文献	41

§1. 本法的實質

所建議的三角測量平差法是以趨近法為基礎的。由趨近法的理論^①可知，在平差觀測成果時，法方程式的未知數（獨立未知數的改正數或聯系數）可以任意分組，然後再按未知數組用逐漸趨近的方法以求之。為此，必須將总的法方程式系分成數個部分法方程式系，而在這些部分法方程式系中只包含各有關組的未知數。

例如，若將未知數 $\tau_1, \dots, \tau_6$ 分成三個組：

$$(1) \tau_1, \tau_2,$$

$$(2) \tau_3,$$

$$(3) \tau_4, \tau_5, \tau_6,$$

則需將总的法方程式系：

$$\left. \begin{aligned} [aa]\tau_1 + [ab]\tau_2 + [ac]\tau_3 + [ad]\tau_4 + \\ + [ae]\tau_5 + [af]\tau_6 + W_1 &= 0 \\ [ab]\tau_1 + [bb]\tau_2 + [bc]\tau_3 + [bd]\tau_4 + \\ + [be]\tau_5 + [bf]\tau_6 + W_2 &= 0 \\ [ac]\tau_1 + [bc]\tau_2 + [cc]\tau_3 + [cd]\tau_4 + \\ + [ce]\tau_5 + [cf]\tau_6 + W_3 &= 0 \\ [ad]\tau_1 + [bd]\tau_2 + [cd]\tau_3 + [dd]\tau_4 + \\ + [de]\tau_5 + [df]\tau_6 + W_4 &= 0 \\ [ae]\tau_1 + [be]\tau_2 + [ce]\tau_3 + [de]\tau_4 + \\ + [ee]\tau_5 + [ef]\tau_6 + W_5 &= 0 \\ [af]\tau_1 + [bf]\tau_2 + [cf]\tau_3 + [df]\tau_4 + \\ + [ef]\tau_5 + [ff]\tau_6 + W_6 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

分成下列部分法方程式系：

① 見參考文獻(5)中的§56。

第一部分法方程式系

$$\left. \begin{aligned} [aa]\tau_1^\circ + [ab]\tau_2^\circ + W_1 &= 0 \\ [ab]\tau_1^\circ + [bb]\tau_2^\circ + W_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

第二部分法方程式系

$$[cc]\tau_3^\circ + W_3 = 0, \quad (3)$$

第三部分法方程式系

$$\left. \begin{aligned} [dd]\tau_4^\circ + [de]\tau_5^\circ + [df]\tau_6^\circ + W_4 &= 0 \\ [de]\tau_4^\circ + [ee]\tau_5^\circ + [ef]\tau_6^\circ + W_5 &= 0 \\ [df]\tau_4^\circ + [ef]\tau_5^\circ + [ff]\tau_6^\circ + W_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

分别解算式(2)、(3)和(4)中的部分法方程式系即可求得未知数的第一次近似值 τ° 。

以后由解算下列形式的各个部分方程式系，逐渐趋近寻求未知数 $\delta\tau$ 的变化：

$$\left. \begin{aligned} [aa]\delta\tau_1 + [ab]\delta\tau_2 + \delta W_1 &= 0 \\ [ab]\delta\tau_1 + [bb]\delta\tau_2 + \delta W_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2')$$

$$[cc]\delta\tau_3 + \delta W_3 = 0, \quad (3')$$

$$\left. \begin{aligned} [dd]\delta\tau_4 + [de]\delta\tau_5 + [df]\delta\tau_6 + \delta W_4 &= 0 \\ [de]\delta\tau_4 + [ee]\delta\tau_5 + [ef]\delta\tau_6 + \delta W_5 &= 0 \\ [df]\delta\tau_4 + [ef]\delta\tau_5 + [ff]\delta\tau_6 + \delta W_6 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4')$$

δW_1 、 δW_2 、 δW_3 、 δW_4 、 δW_5 、 δW_6 之值按下列公式计算：

$$\left. \begin{aligned} \delta W_1 &= [ac]\tau_3 + [ad]\tau_4 + [ae]\tau_5 + [af]\tau_6 \\ \delta W_2 &= [bc]\tau_3 + [bd]\tau_4 + [be]\tau_5 + [bf]\tau_6 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

$$\delta W_3 = [ac]\tau_1 + [bc]\tau_2 + [cd]\tau_4 + [ce]\tau_5 + [cf]\tau_6, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta W_4 &= [ad]\tau_1 + [bd]\tau_2 + [cd]\tau_3 \\ \delta W_5 &= [ae]\tau_1 + [be]\tau_2 + [ce]\tau_3 \\ \delta W_6 &= [af]\tau_1 + [bf]\tau_2 + [cf]\tau_3 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

式中利用最后的数值 $\tau = \tau^\circ + \delta\tau$ ；逐次的 $\delta\tau$ 值是在解算部分方程式系(2')、(3')和(4')的趋近过程中求得。

逐渐趋近解算用下述方法进行。

在解算逐次的部分法方程式系之前，須利用总法方程式系的有关系数（即在求得有关的部分法方程式系时被舍弃的）和其它各組未知数的最后值 $\tau = \tau^{\circ} + \delta\tau$ ，以便計算自由項之变化的逐次值。求得 $\delta\tau$ 之值后，即可計算逐次值 $\tau = \tau^{\circ} + \delta\tau$ ，而这些 τ 值在解算其它部分法方程式系时又可用來計算自由項之变化的逐次值 δW 。 τ° 之值是在第一次趋近中由分別解算具有原始自由項的部分方程式系（2）、（3）和（4）而求得的。

例如，在解算部分方程式系（2'）之前，必須預先按公式（5）計算其自由項。

当逐次的 $\delta\tau$ 值开始在預定的精度范围內重复出現时，趋近計算即可結束。

必須考虑下述見解。

部分方程式系的系数仅換算一次，而且这些部分方程式系的逐次解算，实际上只归結为改算同一栏內的各自由項并将其代入各約化方程式內。

由趋近法的理論可知，各組內未知数的个数愈多，亦即組的个数愈少时，則趋近的收斂性愈强。显然，随着計算自由項逐次值所用的联系系数之个数的減少，趋近的收斂性亦将得以改善。这种情形具有十分重要的意义，因为在平差大規模三角网时所得出的法方程式系几乎总是帶有大量的零系数，而这样就有可能将未知数更合理地分組。

大家知道，数值較小的自由項是有利于趋近的收斂，同时，若与非平方系数相比較而平方系数具有較大的数值时，亦是有利于趋近的收斂。

古典的高斯趋近法（以及由它演变而来的各种方法，其中較著名的有舍笛耳法等）可以視為一般趋近法理論的个别情况，因为按这一方法，在各个組中将各包含一个未知数，而所有的非平方系数都是联系系数。此外，雅柯比法是不宜采用的，因为它不能經常保証趋近的收斂。

按必要未知数（間接觀測）法平差三角网时，以待定点的坐

标和所有测站点上的定向角作为未知数。

在我們所建議的方法中，所有的未知数应首先分成下列两个基本組：

(1) 坐标 x 、 y ，

(2) 定向角 z 。

在将未知数分成两组时，最好是能将比較精确求得其概算值的未知数列入第二組（按趋近的次序而言）。这些未知数愈能精确地求得，則經第一次趋近后所得的第一組未知数便愈接近所求值，也即是說，将使趋近的收敛加快。

在平差三角网时，宜于将坐标列入第一組，而将定向角列入第二組，这是因为定向角的概算值在按必需未知数法进行下述极为简单的概略方向平差之后甚易于以相当高的精度求得。这种简单的概略平差应包括在带有起始坐标方位角的各边上之所有观测以及在待定坐标方位角的各边上之双向观测（但不包括在待定坐标方位角的各边上之单向观测）。

概略平差时，所有测站点之定向角 z 和各待定坐标方位角 α 作为独立的未知数。这样，如图1所示，方向观测值 M 便将以未知数的函数形式表现如下：

$$M_{ki} = \alpha_{ki} - z_k. \quad (8)$$

在图1上， KO 表示零方向，即表示与度盘零直径相应的照准面之位置。以零方向的坐标方位角亦称为定向角 z 。

現在在带有起始坐标方位角 $\alpha_{\text{起始}}$ 的各边上之观测方向写为如下形式：

$$M_{ki} = \alpha_{ki}^{\text{起始}} - z_k. \quad (8')$$

假定

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ki} &= \alpha_{ki}' + d\alpha_{ki}' \\ z_k &= z_k' + \zeta_k' \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

式中 α' 和 z' ——未知数的近似值，

$d\alpha'$ 和 ζ' ——上述近似值的改正数。

那末，在待定坐标方位角的連續边上，得出方向改正数方程

式如下:

$$M_{ki}' + v_{ki} = -z_k' - \zeta_k' + \alpha_{ki}' + d\alpha_{ki}',$$

式中 M_{ki}' ——方向的观测值,

v_{ki} ——方向观测值的改正数。

$$\text{或者} \quad v_{ki} = -\zeta_k' + d\alpha_{ki}' + l_{ki}', \quad (10)$$

式中

$$l_{ki}' = \alpha_{ki}' - (z_k' + M_{ki}'). \quad (10')$$

对于在带有起始坐标方位角的各边上之方向则可写出

$$v_{ki} = -\zeta_k' + l_{ki}', \quad (11)$$

式中

$l_{ki}' = \alpha_{ki}$ 起始—

$$-(z_k' + M_{ki}'). \quad (11')$$

推求近似值 z' 的程序
(即由起始点起向远处的
待定点逐次推算一系列方
向的定向程序)将在下节
详细叙述之。

求得所有三角点上的
 z' 值之后,按下式计算待
定坐标方位角之近似值:

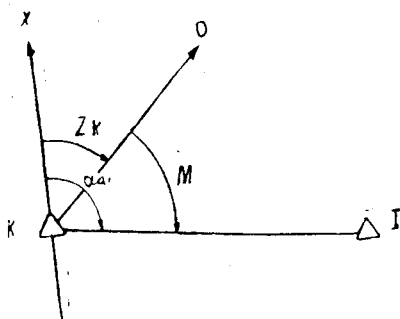


图 1

$$\alpha_{ki}' = \frac{1}{2} (z_k' + M_{ki}' + z_i' + M_{ik}' \pm 180^\circ). \quad (12)$$

根据 (10') 和 (12) 可写出等式

$$l_{ki}' = -l_{ik}', \quad (13)$$

此等式能更便于平差计算。

现在在三角点 K 上所产生的改正数方程式系写出:

$$v_{ki} = -\zeta_k' + d\alpha_{ki}' + l_{ki}' (i=1, \dots, n_k'), \quad (14)$$

$$v_{kj} = -\zeta_k' + l_{kj}' (j=1, \dots, n_k''), \quad (14')$$

式中 n_k' ——在 K 点上沿着待定坐标方位角之各边的连续方向数;

n_k'' ——帶有起始坐标方位角的方向数。

由此，在每个三角点 K 上可得出下列形式的法方程式（設觀測是等精度的）：

$$(n_k' + n_k'') \zeta_k' - \sum_{i=1}^{i=n_k'} d\alpha_{ki}' - [l']_k = 0, \quad (15)$$

式中

$$[l']_k = \sum_{i=1}^{i=n_k} l_{ki}', n_k = n_k' + n_k''. \quad (15')$$

至于每条待定坐标方位角的連續边将可得出两个改正数方程式：

$$\left. \begin{aligned} v_{ki} &= -\zeta_k' + d\alpha_{ki}' + l_{ki}' \\ v_{ik} &= -\zeta_i' + d\alpha_{ik}' + l_{ik}' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

（显然，同一条边的正、反坐标方位角应恰好互差 180° ，因此， $d\alpha_{ki}' = d\alpha_{ik}'$ ）。

顧及等式 (13) 和 (16)，可得每条連續边 KI 之法方程式：

$$2d\alpha_{ki}' - \zeta_k' - \zeta_i' = 0. \quad (17)$$

由方程式 (15) 和 (17) 所組成的总法方程式系宜用下法解算：先从法方程式系中消去所有的未知数 $d\alpha'$ ，然后将已改化并含有未知数 ζ' 的各方程式按高斯趋近法解算。

根据 (17) 可写出：

$$d\alpha_{ki}' = -\frac{1}{2}(\zeta_k' + \zeta_i'). \quad (17')$$

将等式 (17') 的右端部分代入方程式 (15) 以代替 $d\alpha'$ ，便可得：

$$\left(\frac{n_k'}{2} + n_k''\right) \zeta_k' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_k'} \zeta_i' - [l']_k = 0. \quad (18)$$

将改化后的方程式 (18) 乘以 2，从而对每一点 K 可得：

$$(n_k' + 2n_k'') \zeta_k' - \sum_{i=1}^{n_k'} \zeta_i' - 2[l']_k = 0. \quad (19)$$

按高斯趋近法解算方程式 (19) 即可获得下列求这些近似值的公式:

$$\zeta_k' = \frac{2[l']_k + \sum_{i=1}^{n_k'} \zeta_i'}{n_k' + 2n_k''}, \quad (20)$$

式中 ζ_i' 乃是在点 K 周围各点 I 上所求得的最後值 (点 K 与其周围之各点 I 系由待坐标方位角的連續边连接起来的)①。

只要預先将 $2[l']_k$ 和 $n_k' + 2n_k''$ 之值抄录在三角网略图上, 那末根据公式 (20) 便可十分簡便地直接在略图上进行計算。

趋近計算結束之后 (其标志是逐次的 ζ' 值重复出現), 便求得平差值 ζ' , 此后即可計算 $d\alpha_{ki}' = \frac{1}{2} (\zeta_k' + \zeta_i')$ 之值并进而計算平差值

$$z = z' + \zeta' \quad (21)$$

和

$$\alpha = \alpha' + d\alpha'. \quad (22)$$

若顧及 (22)、(12) 和 (17'), 則坐标方位角的平差值还可以按下述公式求得:

$$\alpha_{ki} = \frac{1}{2} (z_k + M_{ki}' + z_i + M_{ik}' \pm 180^\circ). \quad (23)$$

經驗表明, 上述概略平差能保証定向角具有如此高的精度, 以至于通常均不需要再进行更精确的計算。

坐标方位角在概略平差之后亦将具有极高的精度。这一点对于趋近法是十分重要的, 因为这样可以大大地減輕計算准确的概略坐标 x° 和 y° 的任务。倘若按高斯公式計算概略坐标, 并且为此而利用概略平差过的坐标方位角, 那末在逐漸远离起始点时, 只有平行位移会积累起来, 而角度位移的增加却是十分微小的。概略坐标的計算程序必須經過仔細考虑。选择交会角时必须遵循下述波麦兰采夫公式 (此公式是用来計算由坐标方位角交会出坐

① 公式 (20) 实质上相当于参考文献 (1) 中所述的所謂安涅尔方法的公式, 然而在本书中公式 (20) 是用与 (1) 中全然不同的方法求得的。

标时之权)：

$$p = \frac{\sin^2 \beta}{s_1^2 + s_2^2}, \quad (24)$$

式中 β —— 交会角；

s_1 和 s_2 —— 至起始点的距离 (以十公里为单位)。

为了计算坐标必须选择两个最好的交会方向。

为了求出第一组未知数 (即坐标) 的方程式系, 可以利用下述没有定向角改正数 ζ 的改正数方程式:

$$v_{ki}' = a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i + l_{ki}, \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \rho'' \frac{\sin \alpha_{ki}}{s_{ki}}, & b_{ki} &= -\rho'' \frac{\cos \alpha_{ki}}{s_{ki}}, \\ l_{ki} &= \alpha_{ki}^\circ - (z_k + M_{ki}'), \\ a_{ki}^\circ &= \arctg \frac{y_i^\circ - y_k^\circ}{x_i^\circ - x_k^\circ}, \end{aligned} \quad (26)$$

亦即 α_{ki}° 乃是恰与概略坐标相符合的坐标方位角, 而 ξ 、 η 则是坐标的改正数。

现在必须回顾一下, $z = z' + \zeta'$ 之值乃是由概略平差求得的。

等式 (25) 还可以写成下列形式:

$$v_{ki}' = \Delta \alpha_{ki}^\circ + l_{ki}, \quad (25')$$

这是因为

$$\Delta \alpha_{ki}^\circ = a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i, \quad (27)$$

或

$$\Delta \alpha_{ki}^\circ = a_{ki}(\xi_k - \xi_i) + b_{ki}(\eta_k - \eta_i). \quad (27')$$

现在顾及 $a_{ki} = -a_{ik}$ 和 $b_{ki} = -b_{ik}$ 之关系, 写出二相对方向之改正数方程式:

$$\left. \begin{aligned} v_{ki}' &= a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i + l_{ki} \\ v_{ik}' &= a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i + l_{ki} \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

按史赖伯第二法则, (28) 中两个方程式可用下述一个方程式来代替:

$$v_{ki}^{\text{中数}} = a_{ki} \xi_k + b_{ki} \eta_k - a_{ki} \xi_i - b_{ki} \eta_i + l_{ki}^{\text{中数}}, \quad (29)$$

式中

$$l_{ki}^{\text{中数}} = -\frac{1}{2} (l_{ki} + l_{ik}) = \alpha_{ik}^\circ - \\ -\frac{1}{2} (z_k + M_{ki}' + z_i + M_{ik}' \pm 180^\circ),$$

或根据 (23) 而用

$$l_{ki}^{\text{中数}} = \alpha_{ki}^\circ - \alpha_{ki}. \quad (30)$$

由等式 (30) 可知, 依概略平差所求得之 α_{ki} 值, 在平差坐标时可以视为观测值^①。然而我们不应忘记, 这仅是一种计算方法 (应用史賴伯第二法则的结果)。倘若顾及式 (25) 和 (26), 那末可以更准确地說, 平差的第二阶段就是平差已概略定向了的方向。

假设改正数方程式 (29) 的权 $p=1$, 那末每个特定点 K 可得出如下形式的两个法方程式:

$$\left. \begin{aligned} [aa]_k \xi_k + [ab]_k \eta_k + \sum_{i=1}^{i=n_k'} (-a_{ki}^2 \xi_i - a_{ki} b_{ki} \eta_i) + [al^{\text{中数}}]_k &= 0 \\ [ab]_k \xi_k + [bb]_k \eta_k + \sum_{i=1}^{i=n_k'} (-a_{ki} b_{ki} \xi_i - b_{ki}^2 \eta_i) + [bl^{\text{中数}}]_k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

式中之和数 $[aa]_k$ 、 $[ab]_k$ 、 $[bb]_k$ 、 $[al^{\text{中数}}]_k$ 以及 $[bl^{\text{中数}}]_k$ 乃是按至周围各点 (包括起始点在内) 所有 $n_k = n_k' + n_k''$ 个方向而列出的。

在单个法方程式中只出现連测点的坐标改正数。因此, 在 250—300 个点的三角系 (一等环) 中将有 95% 以上的零系数。

解算坐标改正数法方程式系亦可采用趋近法。为此应将三角

① 这条法则: 改正数方程式自由项等于观测值的概算值减去观测值。

网分成若干分区，并使每个分区中约有30—50个三角点，而分区界綫应划在点与点之間。包括在各个不同分区內的三角点之坐标改正数将組成其未知数组。凡与本分区点連測的、位于相邻分区內界綫附近的三角点之坐标改正数的系数 $-a^2$ 、 $-ab$ 、 $-b^2$ 之值均作为联系系数。这样，在趋近計算中便只有相邻分区內界綫附近之三角点参加。当各分区內平均有40个三角点时，趋近計算所牽涉到的将不会超过全部三角点的30—40%以及所有非平方系数的10—15%。

在編制各分区的部分法方程式系表时，在联系点（界綫附近的点）的方程式中只保留本分区內各三角点坐标改正数的非平方系数，余下的联系系数則抄入用以計算自由項 δW 逐次变化的其他表中。如果編制全部三角网的总结方程式系时，那末第二种表可視為基本表的繼續。

由部分方程式系的解算得出各联系点的 ξ° 和 η° 之值。以后便开始趋近計算，其进行的方法如下。

求得各相邻分区联系点的逐次值 $\xi = \xi^\circ + \delta\xi$ 和 $\eta = \eta^\circ + \delta\eta$ 之后，即着手計算本分区各联系方程式的逐次值 δW 。必須指出，这些方程式应放在部分法方程式系的最后。此后，在 δW 栏中进行改算（和在 W 的栏中所进行的改算完全相同），利用約化方程式求得联系点的逐次值 $\delta\xi$ 和 $\delta\eta$ ，并将 $\xi^\circ + \delta\xi = \xi$ 和 $\eta^\circ + \delta\eta = \eta$ 之值交給相邻分区的計算員。后者亦在各自的分区內进行了上述演算之后，将新值 ξ 和 η 交給前者，依此进行計算，直至坐标改正数的逐次变化可以忽略为止。

趋近計算結束之后，利用約化方程式計算分区中的所有其他未知数之值，并进行检查計算。

如上所述，由概略平差所求得的定向角 z 之值通常不需要再进一步作趋近計算。但是在个别情况下，当三角网中有大量的单向觀測的方向，以及有大量的量測距离需要求改正数时，則可以进行坐标和定向角的“第二組”趋近計算。

在单向觀測的方向上应組成权 $p=0.5$ 的改正数方程式，其

形式如方程式 (25)。

至于量测的距离，则应组成下列改正数方程式：

$$v_{ki}^s = -\cos\alpha_{ki}\xi_k - \sin\alpha_{ki}\eta_k + \cos\alpha_{ki}\xi_i + \sin\alpha_{ki}\eta_i + l_{ki}^s, \quad (32)$$

式中

$$l_{ki}^s = s_{ki}^0 - s_{ki}',$$

s_{ki}^0 ——准确按概略坐标计算的距离；

s_{ki}' ——距离的量测值。

长度量测的权须按下列公式计算：

$$p_{ki}^s = \frac{m^2}{2m_{s_{ki}}^2}, \quad (33)$$

式中 m ——方向的观测中误差，

$m_{s_{ki}}$ ——距离 s_{ki} 的量测中误差。

现在顾及三角点 K 上各观测方向的基本改正数方程式

$$\begin{aligned} v_{ki} &= -\zeta_k + a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i + l_{ki} = \\ &= -\zeta_k + \Delta\alpha_{ki} + l_{ki}, \end{aligned} \quad (34)$$

($i=1, \dots, n_k$),

从而写出未知数 ζ 的部分法方程式系

$$n_k \zeta_k - [l]_k = 0, \quad (k=1, \dots, Q), \quad (35)$$

式中 Q ——三角网中所有测站点之个数。

因为各自由项的变化等于各联系系数乘另一组未知数最后数值的乘积之和，所以

$$\delta W = -[\Delta\alpha^0]_1^{n'}$$

和

$$\zeta = \frac{[l] + [\Delta\alpha^0]}{n} = \frac{[v']}{n}. \quad (36)$$

改正数方程式自由项的变化等于数值 ζ ，而供逐次趋近的坐标改正数法方程式自由项的变化将为

$$\left. \begin{aligned} \delta W_{\xi} &= [a \Delta l_{ki}^{\text{中数}}] \\ \delta W_{\eta} &= [b \Delta l_{ki}^{\text{中数}}] \end{aligned} \right\}, \quad (37)$$

式中

$$\Delta l_{ki}^{\text{中数}} = \frac{1}{2} (-\zeta_k - \zeta_i). \quad (38)$$

此后必須在自由項栏中重复改算，繼續进行坐标的趋近計算，以及計算在第一組趋近計算中所求得坐标改正数之改正数。

但是必須注意，如果所平差的三角网是严格根据細則的要求而建立的，那末进行第二組趋近計算便沒有意义了，可是此时必須顧及下述見解。

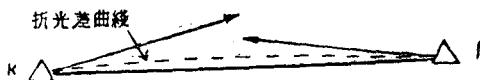


图 2

受地形条件的影响而引起相对方向的折光誤差（它是方向观测誤差的主要来源）在大多数情况下可以相互約制，因为这些誤差具有不同的符号（图 2）。不难看出，当方向得到相当精确的定向时，在下列数值中

$$\alpha = -\frac{1}{2}(z_k + M_{ki}' + z_i + M_{ik}' \pm 180^\circ)$$

折光誤差将得到显著的抵消。但是在經第二組趋近計算之后，这种相互抵消的情况将会減弱。换言之，第二組趋近計算只当有大量的单向观测方向和量测的距离需要平差时才有必要进行，这是因为单向观测的方向以及量测的距离在定向角和坐标方位角的概略平差中均未經采用之故。

現列出检查公式和精度估計的公式如下：

$$v_{ki}' = \Delta\alpha_{ki}^\circ + l_{ki} \quad (39)$$

（按起始边的 $v_{ki}' = l_{ki}' - \zeta_k'$ ），

$$v_{ki}^{\text{中数}} = \Delta\alpha_{ki}^\circ + l_{ki}^{\text{中数}} = -\frac{1}{2}(v_{ki}' + v_{ik}'), \quad (40)$$

$$[pav^{\text{中数}}] = [pbv^{\text{中数}}] = 0, \quad (41)$$

$$v_{ki} = v_{ki}' - \zeta_k, \quad (42)$$

$$[v] = 0. \quad (43)$$

在公式 (39) 至 (43) 中, $\Delta\alpha^\circ$ 之值应理解为与在两組趋近計算之后 (如果已进行两組趋近計算的話) 所求得的坐标最后改正数相符合; 而 ζ 之值則是按公式 (36) 計算的。

方向的觀測中誤差按下列公式計算:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 2q - Q}}, \quad (44)$$

式中 q ——待定点的个数;

Q ——所有測站点的个数;

n ——所有方向的个数。

当三角网中有大量的量測边时, 应計算单位权的誤差

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}, \quad (45)$$

式中 r ——多余觀測的个数。

由此可知

$$m = \mu \sqrt{2}.$$

下面将詳細叙述用所建議的趋近法进行三角网平差时的計算程序, 在叙述的过程中以位于两条投影带上的三角网之平差作为示例加以說明。显然, 計算員在研究了这个示例之后, 当他在平差位于一条投影带上的三角网时便不应当有任何困难了。

§ 2. 平差的程序

在本节之末列出一个平差二等三角网之例, 用以說明上节中的基本原理。

該三角网 (見图 5) 位于两条高斯投影带上, 分成两个分区, 并由两个計算員进行平差。以投影带的分带子午綫作为两分区的界綫。网中有一单向觀測的方向 (2—4) 和一条直接量測