虚数不虚

胡炯涛　沈安晖

浙江教育出版社

虚数不虚

胡炯涛　沈安晖

浙江教育出版社

虚 数 不 虚
胡炯涛 沈安晖
*
浙江教育出版社出版
(杭州武林路125号)
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
*
开本787×1092 1/32 印张5 字数110000
1988年7月第 1 版
1988年7月第1次印刷
印数:000001—19000
*
ISBN 7-5338-0323-X/G·324
定 价: 0.90 元

编写说明

从一九六四年起，全国曾陆续有几本小册子对复数作了一些介绍．二十多年过去了，国内外数学界又对复数作了更为广泛和深入的研讨．为了提高中学生的思维能力，开拓他们的视野，亦为了给中学教师提供一些新鲜的数学教学素材，我们根据几十年的教学经验，收集了近几年来复数领域研究的最新成果，编写了这本小册子，作为奉献给中学数学教改园地的一朵小花．

本书写作时根据中学生的学习特点，知识分块介绍，选例典型、丰富，并进行了适当的归类与总结，揭示了解题技巧和规律．解题突出能力培养的指导，对一些问题采取先分析后论证的方法来解决，特别是对一些非复数范围内的问题，我们也试探着从复数的角度解决它，以期引导中学生拓宽视野，发展创造性思维的能力．本书还补充、增加了许多新知识，如复系数方程、复变函数论等，以激起学生们对复数作进一步研究的兴趣，中学数学教师也可以从中得到一些富有启发性的观点和材料，避开了过于专门化和“课本化”的偏颇．

本书可作为中学生的课外读物，也可作为中学数学教师的参考资料．

本书由上海师范大学数学系林炎生副教授审稿，在此谨表示感谢。

编　者

1987年9月

目　　录

第一章　虚数的由来

数，是一个奇妙的概念．数的历史，远胜于人类的文明史．今日地球上的任何一个民族，不论其如何原始，都曾对数产生过一定的概念．

恩格斯认为："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的．"

追溯上去，在文字出现以前，人们早已利用各种方法（例如结绳）来记数．《周易·系辞》中说："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契（即在骨或竹、木、石上刻文字）．"这种记事法在日本、非洲、澳洲、南美洲都曾使用过．

数的概念虽然产生较早，但它的发展进程却是相当迟缓的．直至今日，一些不发达地区如澳洲的波利尼西亚(Polynesia)群岛等地，还仅仅知道头几个自然数的名称．

最早产生的数是自然数．这是因为人有十个手指，原始人在计算东西数量时利用手指最方便，从而最早的进位制也就是十进位制．

当人们进入定居生活以后，增进了度量事物的概念．当体积、重量等度量产生时，分数便应运而生．最初，分数被看作是整体或一个单位的一部分，以后才在运算过程中产生了分数，它表示两个整数的商．由此，我们看到了分数的另一个来源：一数不能整除另一数时，便产生了分数．事实上，"分数"的拉丁文来自 frangere，含有打破、断裂的意思．而《九章算术》则是世界上系统叙述分数的最早著作．

小数就是十进分数．在欧洲，它很晚才被人们普遍接受，原因在于巴比伦的60进制小数传到西方以后，经过希腊人的推广，逐渐取得了统治地位．我国元朝刘瑾所著的《律占成书》中把小数降低一格来表示106368.6312，这是世界上最早的小数表示法．

负数产生于私有制社会的上升时期．第一次应用正负数（理解为财产和负债）是中世纪的印度人（阿尼亚伯哈特，柏拉马克特和柏哈斯卡拉）．到了十五世纪末叶，德国数学家维特曼引入了“+”和“−”来表示正、负数．由负数产生的经济背景来看，数的概念的这一扩展是与度量有方向的量（如进退、上下、高矮）联系着的，人们把它们归结为两个相反的方向，这就是“正”与“负”．

这以后，数的概念是否够用了呢？矛盾是否都解决了呢？没有．

公元前五世纪，希腊人在研究几何图形时发现，边长为1个单位的正方形，其对角线的长（现在我们知道它等于$\sqrt{2}$）就不是有限小数或循环小数，循此进而创造了不能用比的形式表示的数，这就是无理数．当时，这种数只能用几何方法加以处理，硬是把数与几何截然分开，且在以后二千年间，几何学几乎成为严密数学的基础．到十六世纪时，欧洲人发现他们讨论用十进小数来表示无理数是在“无止境地往远跑”，也就是“无限不循环”的意思．此外，有人采用连分数来逼近无理数$\sqrt{2}$，π等，后来欧拉给出了用无限连分数计算平方根的一般方法．

无理数的逻辑结构的真正解决是在十九世纪．1886年施图尔兹证明：每个无理数都能表达成不循环小数．这实际上是给出了无理数的定义．十九世纪后期，又经过众多数学家的努

力，终于建立了一个完整的无理数理论体系.

历史在发展，数的概念也继续随着生产力的发展而发展. 到了十六世纪，人们又提出了“求负数的平方根”的问题.

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的. 1484年法国人舒开在《算术三篇》中，解二次方程 $4+x^2=3x$ 而得根 $x=\frac{3}{2}+\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$，他声言：这是不可能的.

引入虚数是意大利数学家卡当的功劳. 1545年，卡当在寻求三次方程 $x^3+px+q=0$ 的解的过程中发现：由于负数开平方所产生的新数（即虚数），与实数一起用原有法则进行运算是一致的，于是就认定这是一个可以开拓的领域. 在《大术》中，他解决了这样的问题：“两数的和是10，积是40，求两数.”用现代符号可解得 $x=5\pm\sqrt{15}\,i$，而当时卡当把 $5+\sqrt{-15}$ 写成5. $\tilde{p}$. R. $\tilde{m}$.15.其中 R 相当于根号，$\tilde{m}$ 是减(即负)，R. $\tilde{m}$.15.是 $\sqrt{-15}$. 这是最早的虚数表示法. 但是当时卡当并不理解这个新数的实际意义，他称负数的平方根为“诡辩量”，并怀疑这种数的运算的合法性.

1637年，笛卡尔在《几何学》中第一次给出了虚数的名称“imaginaires”（虚的），它与“realles”（实的）相对应. 随后人们不断地为这个新数罩上“想象的”、“虚的”等等神秘外衣，对这个新数的特点一言蔽之：虚.

的确，在复数的几何表示发现以前，虚数始终给人以虚无缥缈之感，连大数学家莱布尼兹都认为：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的－1的平方根.”此后有不少数学家谋求从几何途径来揭示虚数的含义.

瓦里士已经意识到不可能在直线上表示虚数，他为虚数作了如下解释：若某人失去10亩土地，也即得到－10亩土地，又若土地为正方形，则其一边长为$\sqrt{-10}$.

挪威的米塞尔的解释更为合理．他用＋1表示正方向单位，$+\varepsilon$ 表示另一种单位，方向与前者垂直且有相同原点，并记$\sqrt{-1}=\varepsilon$，$\cos v+\varepsilon\sin v$．除虚数单位符号不同之外，和现代复平面表示法一致．

后来有名的数学家尤拉和棣莫弗相继揭去了虚数上这层神秘的纱幕——他们分别得到了有名的公式：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \text{ 及 } (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

特别是尤拉在1748年得到的著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，当取 $\theta=\pi$ 时就得 $e^{i\pi}+1=0$．克莱茵认为这是整个数学中最卓越的公式之一，它把数学中的数 1，0，i，π，e 联系了起来．

1806年，“数学之王”高斯以其出色的工作宣布用平面上的点来对应复数．从此以后，虚数有了十分直观的意义，并由此系统地建立了复数的理论和研究方法．在复数概念的基础上，十九世纪中叶以后又发展了研究复数量之间依赖关系的庞大数学分支——复变函数论，它是解决天体力学、流体力学等的有力工具．这样，人们才普遍承认：虚数不虚．

第二章　复　数　系

一　从虚数单位 i 谈起

尤拉首先用拉丁文“imaginary”（想象的）的第一个字母 i 作为虚数单位的符号，由此引出了一个崭新的数系——复数系.

虚数单位的含义是这样规定的：$i^2=-1$，i 可以和实数在一起进行通常的四则运算．除此之外，它还具有与实数不同的运算特性：

由于 $i^2=-1$，$i^4=1$，因此 $i^n(n\in N)$ 的值当 n 变化时就以 4 为周期重复地取 i，-1，$-i$，1 这四个值，即 $i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，故 $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$．这表明：任意四个 i 的幂，当其指数为四个连续自然数时，则其和为0.

例 1　求和：$\sum\limits_{k=1}^{57} i^k$.

解：上式各项指数为连续自然数，从 i 到 i^{56} 相加得十四个 0，故结果为 $i^{57}=i$.

此外，我们还可由直接计算得到一些公式：

$$(1\pm i)^2=\pm 2i,\ \frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i.$$

这些公式在与 i^n 有关的运算中有明显的简化作用.

例 2 求 $z=\dfrac{(1+i)^{200}(6+2i)-(1-i)^{198}(3-i)}{(1+i)^{196}(23-7i)+(1-i)^{194}(10+2i)}$ 的值.

解：$\because\quad (1+i)^{200}=(2i)^{100}=2^{100}$，$(1-i)^{198}=2^{99}i$，

$(1+i)^{196}=-2^{98}$，$(1-i)^{194}=-2^{97}i$，代入即得

$$z=-\frac{11+i}{11-i}=-\frac{60}{61}-\frac{11}{61}i.$$

例 3 若 $(1+i)^n=(1-i)^n(-i)$，求 n.

解：$\because\quad (1-i)^n\neq 0$，原式可变形为 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=-i$，

即 $$i^n=-i,\quad \therefore\quad n=4k+3\quad (k\in Z).$$

$i^2=-1$ 常常可以用来进行运算化简.

例 4 计算 $\dfrac{1}{3i+\dfrac{1}{2i+\dfrac{1}{i}}}$.

解：以 $-i^2$ 代换 1 将原式变形：

$$原式=\frac{-i^2}{3i+\dfrac{-i^2}{2i+\left(\dfrac{-i^2}{i}\right)}}=\frac{-i^2}{3i+\left(\dfrac{-i^2}{i}\right)}=\frac{-i^2}{2i}$$

$$=-\frac{i}{2}.$$

形如 $a+bi(a、b\in R)$ 的数叫复数，a、b 分别称为复数的实部和虚部，通常以 C 表示复数集，以 z 表示复数.

两个复数当且仅当它们的实部和虚部分别相等时相等.

$z=a+bi$ 是复数的代数式. 复数还有它的几何表示法. 复数 $z=a+bi$ 与复平面上以坐标原点 O 为起点、以点 $Z(a,b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 r 称为复数 $a+bi$

的模（或绝对值），记作$|a+bi|$或$|\overrightarrow{OZ}|$，$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$．
x 轴正方向到$\overrightarrow{OZ}$的交角θ称为复数$a+bi$的辐角，记作$\mathrm{Arg}z$，（今后 $\mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}z_2$ 也可表示两个角相差 2π 的整数倍．）适合 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角θ称为辐角的主值，记作 $\arg z$，

$$\therefore\quad \mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\ (k\in Z).$$

复数 $\bar{z}=a-bi$ 称为复数 $z=a+bi$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}=\overline{a+bi}$．

复数 $z=a+bi$ 当 $b=0$ 时，就是实数，因此，实数是复数的特殊情况．当 $b\neq0$ 时，则称为虚数．实部等于零，而虚部不等于零的复数叫做纯虚数．

显然，表示实数的点都在 x 轴上，表示纯虚数的点都在 y 轴上．在复平面上，把 x 轴称为实轴，y 轴(除原点)称为虚轴．

例 5 当复数 $(k^2-5k+6)+(k^2-4)i$ 所对应的复数点分别位于(1)原点向右的 x 轴上；(2)原点向上的 y 轴上；(3)原点；(4)第二象限．求相应的实数 k 的取值．

解：(1) 由$\begin{cases}k^2-4=0,\\ k^2-5k+6>0,\end{cases}$ 解得 $k=-2$；

(2) 由$\begin{cases}k^2-4>0,\\ k^2-5k+6=0,\end{cases}$ 解得 $k=3$；

(3) 由$\begin{cases}k^2-4=0,\\ k^2-5k+6=0,\end{cases}$ 解得 $k=2$；

(4) 由$\begin{cases}k^2-4>0,\\ k^2-5k+6<0;\end{cases}$ 解得 $2<k<3$.

利用复数相等的充要条件可以直接确定复数的实部和虚部．

例 6 求适合下面等式的实数值 x,y：

$$(1+i)x+(1-i)y=2.$$

解：把等式按 i 整理成 $(x+y)+(x-y)i=2+0\cdot i$.

由于 x,y 是实数，得到如下方程组：

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0, \end{cases}$$ 解之，得 $x=1,y=1$.

二　复数的四则运算

每次数的扩充，都伴有相应的运算律产生．同样，复数也有它的运算律．

1．复数的四则运算和复数运算的特殊性

通常的四则运算适用于复数，而且这种运算对于复数带有“封闭性”．

两个复数经过加、减、乘、除四则运算后仍为复数．

设两个复数 $z_1=a+bi, z_2=c+di\quad(a,b,c,d\in R)$．只要把 z_1,z_2 的和、差、积、商表示成 $A+Bi$ 的形式（其中 A、B 为实数）就得到了上述结论．

加法：$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$，$a+c$、$b+d$ 都是实数，$\therefore\quad z_1+z_2\in C$.

减法：$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，$a-c$、$b-d$ 亦是实数．

乘法：$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，这里的 $ac-bd$ 和 $ad+bc$ 也是实数．

除法：当 $z_2\neq0$，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

这里$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$、$\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$也是实数，这就说明了z_1，z_2经过加、减、乘、除仍然是复数.

另外，复数模的运算律同实数绝对值的运算律是一致的.

然而，由于$i^2=-1$的引入，使得复数的运算又有其特殊性.

以前曾采用过$\sqrt{-1}$来表示i，结果引出不少矛盾. 因为在实数范围内，实数a的n次方根虽有不少表示法，但均以$\sqrt[n]{a}$为基础，且当$\sqrt[n]{a}$有意义时，它总表示一个值. 而在复数范围内，任意一个非零的复数的n次方根都有n个值，因此引进根号表示方根就会产生混淆，同时根号引进使运算又产生新的矛盾，例如$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=2$，但实际上$\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$，$\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i=-2$.

基于上述原因，为避免混淆，所以通常不用“$\sqrt[n]{}$”的记号来表示复数z的n次方根，而是用语言“z的n次方根”来表述.

即便如此，除四则运算外，也得严格注意不要随意引入其他未经证明的运算律. 例如，求$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{4}{x}}$，其中$x=\csc 10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ$. 看这样一种算法：

$$\text{原式}=\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4\right]^{\frac{1}{x}}=[(-i)^4]^{\frac{1}{x}}=1^{\frac{1}{x}}=1.$$

这种计算方法是错误的. 因为$(a^m)^n=a^{mn}$这个运算律当m、n为分数时，只有a是正实数时才能成立，这儿任意套用是

不行的．实际上，$x=\frac{1}{\sin 10^{\circ}}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^{\circ}}=4$，$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{1}{4}$，原式$=(-i)^{1}=-i$．

因此，在使用$(a^{m})^{n}$这一法则时，必须先验证m、n是否为整数．若m、n为整数，只要$a\neq 0$即成立；若m、n是有理数（或实数）时，则必须$a>0$，a为虚数则不能成立．

2．复数为什么不能规定大小

数的大小比较也就是数的有序性，实数可以比较大小，也就是说实数有个顺序问题．这里所谓的“顺序”，指的是实数a、b、c满足以下四个条件：

(1) 对两个不同的实数a，b，$a<b$、$b<a$中有且仅有一个成立．

(2) 若$a<b$，$b<c$，则$a<c$．

(3) 若$a<b$，则对任意c有$a+c<b+c$成立．

(4) 若$a<b$，则对任意$0<c$有$ac<bc$成立．

按照上述条件，复数无法规定顺序，证明如下：

用反证法．假设复数适合上述四个条件．

$\because\ i\neq 0$，则由(1)知$0<i$或$i<0$中必有且仅有一个成立．

(i) 假定$0<i$，则由(4)得$0\cdot i<i^{2}$，即$0<-1$……①，

由(3)得$0+1<(-1)+1$，即$1<0$……②

①的两边同乘以-1，由于$0<-1$，据(4)得：

$0\cdot(-1)<(-1)\cdot(-1)$，即$0<1$……③

由于②、③的结果与条件(1)矛盾，故$0<i$不成立．

(ii) 假定$i<0$．由(3)得：$(-i)+i<0+(-i)$，即$0<-i$．由(4)得：$0(-i)<(-i)\cdot(-i)$，即$0<-1$，仿照(i)的证明亦可推出矛盾，故$i<0$不成立．即复数不能规定大小．