中级力学习题集

下册

湖北人民出版社

中级力学习题集

下　册

中级力学习题集

（下　　册）

《中级力学习题集》编译组

湖 北 人 民 出 版 社

中级力学习题集

（下　册）

《中级力学习题集》编译组

*

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

武汉市江汉印刷厂印刷

850×1168毫米32开本　13.5印张　332,000字

1982年9月第1版　1982年9月第1次印刷

印数：1—8,900

统一书号：7106·1661　定价：1.31元

目　录

第十一章　质点静力学

1. 力的定义：力是改变或趋于改变物体静止状态或匀速直线运动状态的任何原因．力的单位为牛顿(N)一牛顿定义为使质量 1 千克的物体得到 1 米/秒^2 加速度所需的力．

为完整地描述作用在质点上的力，需要给定：(i) 力的大小，(ii) 力在空间的方向．对刚体，还需给定力的作用点．力是矢量．

2．可以用有向线段 AB 表示一个给定的力，线段的长度表示力的大小；以字母排列顺序表示给定力的指向，例如线段 AB 表示某一从 A 到 B 的作用力，BA 表示从 B 到 A 的作用力，写成矢量式时，有 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$.

按矢量相加法则，力相加时采用力的平行四边形法则，这是静力学的出发点．表述如下：

若二力 P 和 Q 作用于质点 O，用自点 O 引出的直线 OA、OB 表示它们的大小和方向，则它们与另一力(即合力) R 等效，R 的大小和方向可用平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC 表示（图 11.1）．设二力夹角为 $\theta(=\angle AOB)$，R 与 P 间夹角为 $\angle COD$（CD 垂直于 OA 或其延线），则

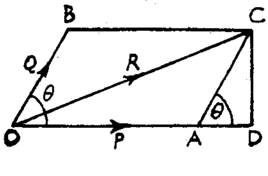

图 11.1

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta},$$

$$\operatorname{tg}\angle COD=\frac{P\sin\theta}{P+Q\sin\theta}.$$

二力正交时，$\theta=90^\circ$， 则

$$R=\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$\operatorname{tg}\angle COD=Q/P.$$

二力相等时，若均等于 P，则

$$R=2P\cos\frac{\theta}{2},\qquad \operatorname{tg}\angle COD=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

即合力 R 平分二力间夹角.

3. 由于以一已知线段为对角线可以作无数个平行四边形，因此可用无数个方法将一力分解为二个分量. 通常，是将其沿二个互相垂直的方向分解.

如图 11.2，以 OC 表示已知力 F，若将 F 沿 OX 和 OY 方向的两分量 OA 和 OB，且 $\angle COX=\theta$，则

$$OA=F\cos\theta,\qquad OB=F\sin\theta.$$

若要求力 F 沿与之成 α 和 β 角方向的两分量(图 11.3)，则可按平行四边形法则得

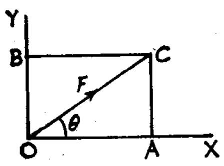

图 11.2

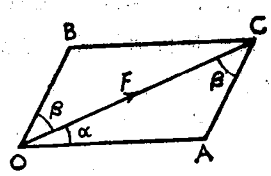

图 11.3

$$OA=\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad OB=\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

4. 若作用于一点的三个力可依次用一三角形的三边表示其大小和方向，则三力互相平衡.

反之，若作用于一点的三个力相平衡，就可依次取一三角形的三边来表示它们的大小和方向. 此三角形称为力的三角形.

因此，若用一三角形 ABC 的两边 AB、BC 表示作用于某点的二个力的大小与方向，则其第三边 AC 将表示此二力之合力的大小与方向.

5. 拉米定理：

若作用于一点的三个力平衡，则每一力与另二力间夹角的正弦成正比。

如图 11.4，设 P、Q、R 为作用于 O 而互相平衡的三个力，OA 表示 P，OB 表示 Q，CO 表示 R，各力所对之角依次为 α、β、γ. 则

$$\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}.$$

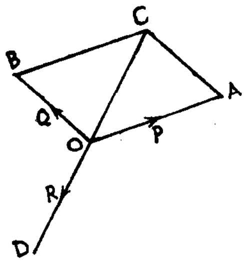

图 11.4

6. 若两力作用于一质点，它们在任何给定方向的分量之和，等于它们的合力在该方向的分量.

进而可知，若作用于一质点的三个或三个以上的力相互平衡，则它们在任一给定方向的分量之代数和必为零.

7. 作用于一质点的任意数目的力，若能用一多边形的各边依次表示它们的大小和方向，则诸力平衡. 此多边形称为力的多边形。若力多边形自身不能封闭，则此力系不平衡，而自首端连向末端的多边形的封闭边表示其合力 R.

8. 若作用于一质点的任意数目的力处于平衡状态，则诸力在任意两个互成直角的方向的分量之代数和必为零.

反之，若诸力在两个互成直角的方向的分量之和均为零，则它们处于平衡状态.

在实用中，通常将给定的诸力按两个互成直角的方向分解

(通常为水平和铅垂二个方向)，并使每一个方向的分量之和为零.

9. 当一物体压向另一物体时，总是存在着沿共有表面而阻止相互滑动的力，称为摩擦力. 许多问题中假定物体完全光滑，这种情况下物体间只存在垂直于共有表面之力，这个力称为正压力或法向压力.

摩擦力的方向与物体趋于运动的方向相反. 在达到最大值之前，摩擦力恰好等于引起运动趋势的力. 一定条件下只能产生有限值的摩擦力，其最大值称为极限摩擦力，其值等于 μR(μ 为摩擦系数，R 为正压力). 此值与接触表面的面积及形状无关.

10. 在倾角为 α 的粗糙斜面上，质点在自重作用下下滑的条件是 $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \mu = \operatorname{tg}\lambda$($\lambda$ 为摩擦角).

若质点(重 W)受力 P 之作用，P 与斜面成 θ 角.

Ⅰ. $\alpha < \lambda$ 时(质点不能自行下滑)

a. P 向上作用(图 11.5)，质点即将上移时：

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}.$$

b. P 向下作用(图 11.6)，质点即将下滑时：

$$P = W\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}.$$

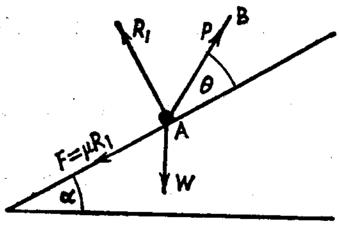

图 11.5

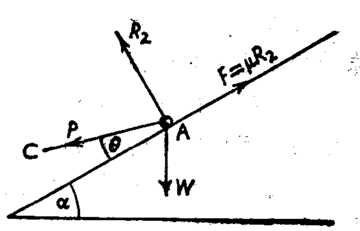

图 11.6

Ⅱ. $\alpha > \lambda$ 时(质点有自行下滑的趋势)

a. P 向上时与 Ⅰ、a 同.

b. P 向上起支撑作用，质点行将下滑时(图 11.7)：

$$P = W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}.$$

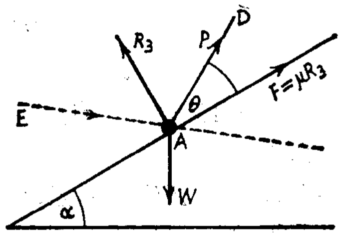

图 11.7

§ 11—1　力的合成与分解

例　题

例 1. 如果力 $3P$，$5P$ 之合力等于 $7P$，求二力的夹角.

解：若 θ 为力 $3P$ 与 $5P$ 的夹角，R 为合力，则

$$R^2 = 9P^2 + 25P^2 + 30P^2\cos\theta,$$

∴ $$34P^2 + 30P^2\cos\theta = 49P^2,\ (\text{因 } R = 7P)$$

∴ $$30P^2\cos\theta = 15P^2,$$

∴ $$\cos\theta = \frac{1}{2},$$

∴ $$\theta = 60°.$$

例 2. 若二力 P 与 Q 间成一夹角使 $R=P$. 证明，当 P 值增大一倍时，新的合力与 Q 成直角.

解：令 OA、OB 表示 P 和 Q (图 11.8). 则平行四边形

$OACB$ 的对角线 OC（表示合力 R）等于 OA.

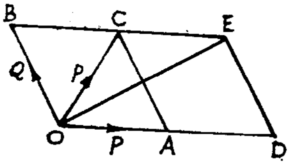

图 11.8

延长 OA 至 D，使 $AD=OA$，则 OD 表示 $2P$，而 Q 与 $2P$ 的合力用平行四边形 $ODEB$ 的对角线 OE 表示.

$\because$ $BC=OA=P$,

$CE=AD=P$.

$\therefore$ $CB=CE=CO$.

因此 BE 是以 C 为圆心而又通过 O 点的半圆的直径,

$\therefore$ $\angle BOE$ 为直角.

另解：$\because$ $CE=CO$，则 $\angle CEO=\angle COE$,

$\because$ $CB=CO$，则 $\angle CBO=\angle COB$,

$\therefore$ $\angle CEO+\angle CBO=\angle BOE$,

$\therefore$ $\angle BOE$ 为直角.

例 3. 两个质量都等于 10 公斤的重物系在一轻线的两端，该线跨过墙上布置成等边三角形的三个光滑销钉，三角形的一边水平. 求每个销钉所受之力.

解：设 A、B、C 为三销钉的位置（图 11.9）.

因销钉光滑，该线各处张力相同，都等于 $10\,g$ 牛顿 $=98$ 牛顿.

A 所受之力为夹角成 $60°$ 的二个 98 牛顿的张力之合力. 设 R（牛顿）为该合力之值，则

$R^2=98^2+98^2+2\times98^2\times\cos60°=3\times98^2$,

$\therefore$ $R=98\sqrt{3}=170$.

B 和 C 所受之力为夹角成 $150°$ 的二个 98 牛顿的张力之合力. 设 S（牛顿）为该合力之值，则

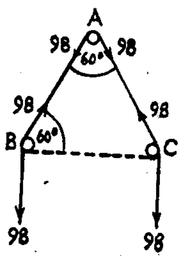

图 11.9

$$S^2 = 98^2 + 98^2 + 2 \times 98^2 \times \cos 150^\circ$$
$$= 98^2(2 - \sqrt{3}) = 98^2 \times 0.268,$$
$$\therefore \quad S = 98 \times 0.518 = 50.8.$$

因上述各情况下两分力值均相等，故各处作用力均平分销钉两侧线段间的夹角.

习　　题

1. 下述各题中，P 和 Q 表示二个力，θ 表示其间夹角，R 为其合力.

(i) 设 $P=9$，$Q=12$，$\theta=90^\circ$，求 R.

(ii) 设 $R=13$，$Q=5$，$\theta=90^\circ$，求 P.

(iii) 设 $P=7$，$Q=8$，$\theta=60^\circ$，求 R.

(iv) 设 $P=10$，$Q=10$，$\theta=120^\circ$，求 R.

(v) 设 $P=12$，$Q=5$，$R=11$，求 θ.

(vi) 设 $P=3$，$Q=5$，$\theta=\sin^{-1}\frac{3}{5}$，求 R.

2. 当二力相等且均为 P，其间夹角为 120° 时，证明其合力亦为 P.

3. 二相等 P 力之合力等于(i)P，(ii) $\sqrt{3}P$ 时，求二力间夹角.

4. 二力 P 和 Q 的合力大小与 P 相等，而二力 $2P$ 和 Q (作用方向同前)的合力大小也与 P 相等. 求 Q 的大小，并证明 Q 与 P 成 150° 角.

5. 二力之和为 24 牛顿，其合力为 12 牛顿，且与二力中较小者成直角. 求二力的大小及其间夹角.

6. 两个质量为 10 千克的相等重物，系于一轻线的两端，该线跨过墙上的三个光滑销钉，三销钉成等腰三角形分布，其底边水平，顶角为 120°. 求每个销钉所受之力。

7. 两个质量为 5 千克的相等重物系于一轻线的两端，该线跨过墙上二个光滑销钉，其中之一高于另一个，二钉连线与水平线成 30° 角. 求每个销钉所受之力.

8. 二力大小为 5 牛顿和 12 牛顿，若二力与另一 5 牛顿力平衡. 求二力间夹角.

9. A、B 是圆周 ABC 上二定点，P 为在圆弧 ACB 上移动的一点. 沿 PA 和 PB 各作用着一个恒力，试证明其合力作用线通过一定点.

10. 二力 P 和 $2P$ 作用于一点，其合力与 P 垂直. 求 P 与 $2P$ 间夹角.

11. 二力 3 牛顿和 5 牛顿的合力与较小者成直角. 求此合力的大小及二力间夹角.

12. 二力 4 牛顿与 6 牛顿汇交成 60°，用图解法求其合力，并用计算法校核.

13. 二力大小为 5 牛顿和 6 牛顿，其间夹角为 40°. 用图解法求其合力.

14. 一合力为 8 牛顿，其方向与大小为 4 牛顿的分力成 60°. 用图解法求出另一分力的大小与方向.

15. 当二相等力夹角为 2α 时，其合力等于二力夹角为 2β 时的二倍. 证明：$\cos\alpha = 2\cos\beta$.

16. 有 25 牛顿的力与水平线成 $\theta°$. 若其铅直分量为 15 牛顿，求其水平分量及 θ 值.

17. 将 10 牛顿力分解成两个互相垂直的分量，使得：(i)两分量相等，(ii)一分量为另一分量之三倍.

18. 将 P 牛顿力分解成大小均为 $2P$ 牛顿的二个分力. 求分力的方向.

19. 12 牛顿力的一个分力为 4 牛顿，且两者夹角为 30°. 求另一分力的大小与方向.

20. 一人用与地面成 45° 的 500 牛顿力，将一质量为 60 公斤的压草机拉过一水平草坪．求：(i) 作用在压草机的向前拉力，(ii) 压草机与草坪间的正压力．

21. 质量为 25 千克的物体悬挂在两根线上，一根线与铅垂线成 60°，另一根成 20°．计算每根线的张力，并用图解法加以验证．

§11—2　受三个力的质点的平衡

例　题

例 4. 作用在一质点上的力 $7P$、$8P$ 及 $5P$ 处于平衡，用图解和计算法求出力 $8P$ 与 $5P$ 间夹角．

解：由于上述三力平衡，即可依次用一三角形的三边表示之．如图 11.10 A，用 $AB=7$ 单位长，$CA=5$ 单位长，$BC=8$ 单位长作出三角形 ABC．因而上述三力必平行于此三角形的三个边．

通过测量得$\angle ACB=60°$．计算时，设$\angle ACB=\theta$，则有

$$7^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos\theta,$$

$$\therefore\quad 49=64+25-80\cos\theta,$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{40}{80}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \theta=60°.$$

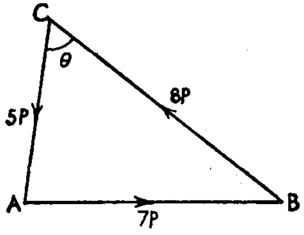

图 11.10 A

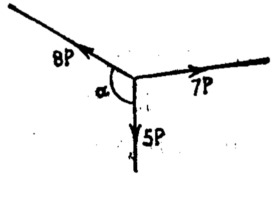

图 11.10 B

三力的方向必如图 11.10 B 所示，图中表示各力的矢量按平行于三角形 ABC 的对应边画出.

力 $8P$ 与 $5P$ 间夹角为 $180°-\theta=120°$.

例 5. 质量为 5 千克的重物用一不可伸长的轻线挂在定点 O 上. 若重物被一水平力 P 牛顿拉向一侧而处于平衡，此时线与铅垂线的夹角为 30°. 求 P.

解： 图 11.11 中，A 为重物的平衡位置.

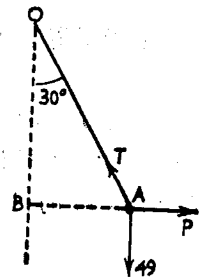

图 11.11

重物其受三个力的作用：(i) 其自身重力 49 牛顿；(ii) 水平拉力 P 牛顿；(iii) 线的拉力 T 牛顿.

若水平作出 AB，则三角形 OAB 的三边平行于上述三力，因而也按一定的比例表示了上述三力.

$$\therefore \quad \frac{T}{AO}=\frac{P}{BA}=\frac{49}{OB},$$

$$\therefore \quad P=49\frac{BA}{OB}=49\ \mathrm{tg}\ 30°$$

$$=\frac{49}{\sqrt{3}}=28.3.$$

例 6. 质量为 50 千克的质点，用长 3 米和 4 米的两根线悬挂于二点，二点处于同一水平线上，间距 5 米. 求两线的张力.

解： 令 AC、BC表示两线(图 11.12)，并设两线之张力为 T_1、T_2 牛顿.

$AC=3$ 米，$BC=4$ 米，$AB=5$ 米，所以角 ACB 为直角.

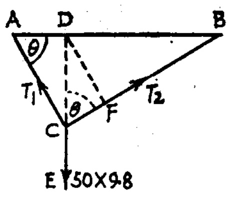

图 11.12

作 CD 垂直于 AB；因 AB 水平，DC 铅垂，故在 C 的质点的重力铅 DC 的延线作用.

令 $\angle DCB=\theta$，则 $\angle BAC=\theta$，且

$$\cos\theta=\frac{3}{5},\qquad \sin\theta=\frac{4}{5}.$$

方法 1　沿水平方向分解各力，则向左的分量必与向右的分量相等，

$$\therefore\qquad T_1\cos\theta=T_2\sin\theta. \tag{i}$$

沿铅垂方向分解各力，则向上的分量必与向下的分量相等，则

$$T_1\sin\theta+T_2\cos\theta=50\times9.8=490. \tag{ii}$$

由（i）　$\frac{3}{5}T_1=\frac{4}{5}T_2$,

即　$T_2=\frac{3}{4}T_1$,

由（ii）　$\frac{4}{5}T_1+\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}T_1=490$,

$\therefore$　$\frac{25}{20}T_1=490$,

$\therefore$　$T_1=392,\qquad T_2=294.$

或者，沿 AC 及 CB 分解各力，即可直接得

$$T_1=490\sin\theta=392,$$
$$T_2=490\cos\theta=294.$$

方法 2　延长 DC 至 E，按拉米定理

$$\frac{T_1}{\sin\angle BCE}=\frac{T_2}{\sin\angle ACE}=\frac{50\times9.8}{\sin\angle ACB}.$$

但，$\sin\angle BCE=\sin\theta$，$\sin\angle ACE=\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，且 $\angle ACB=90^\circ$.

因此

$$\frac{T_1}{\frac{4}{5}}=\frac{T_2}{\frac{3}{5}}=\frac{490}{1},$$

$\therefore$　$T_1=392$，$T_2=294$.