高等学校经济与管理专业教材

微积分

CALCULOUS

主编　张金清

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校经济与管理专业教材

微 积 分

主　编　张金清
副主编　郝秀梅　陈晓兰　刘太琳
主　审　李静芬　刘蒲凰

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/张金清主编.—北京：高等教育出版社，2002.7
ISBN 7-04-011217-5

Ⅰ.微… Ⅱ.张… Ⅲ.微积分—高等学校—教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 036935 号

责任编辑 孙鸣雷 特约编辑 李炳钊
封面设计 吴 昊 责任印制 潘文瑞

书　　名	微积分		
主　　编	张金清		
出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号		021-56964871
邮政编码	100009	免费咨询	800-810-0598
传　　真	010-64014048	网　　址	http://www.hep.edu.cn
	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
排　　版	南京理工排版校对公司		
印　　刷	上海新华印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2002 年 7 月第 1 版
印　　张	19	印　　次	2002 年 7 月第 1 次
字　　数	468 000	定　　价	22.00 元

序

微积分作为高等数学最基础的部分，其思想、方法和内容在包括经济学在内的众多学科和领域都具有广泛的应用。现在，“微积分”已被作为财经类专业的一门核心课程。山东财政学院教授张金清博士主编的教材《微积分》是山东省高校教改试点课程试用教材，已通过了专家组的鉴定。该教材具有下列特色：

一、密切结合财经类专业的需要。除在书中写了经济分析中几个常用的经济函数、导数在经济学中的应用、定积分在经济学中的应用、微分方程在经济学中的应用、差分方程在经济学中的应用等内容以外，在附录一中，通过两个典型的经济数学实验——效用最大化问题和养老保险问题，讲解了如何从实际问题抽象出数学模型，然后用微积分知识（包括简单的微分方程和差分方程）对模型进行讨论求解，再利用解进行定量和定性分析研究，最后得出相应经济结论等解决实际问题的方法和步骤，这对培养学生运用微积分知识解决经济问题的能力是很有好处的。

二、教材中引入了数学演示和实验。利用 Mathematica 数学软件，对一些重要的基本概念，如极限、导数、定积分、二重积分等进行了演示和实验，通过几何图形和具体数据等直观的表现，增加了学生对这些基本概念的感性认识，从而加深了理解。

三、选编了对微积分发展简况的介绍。在附录二中选编了对微积分的创立及其发展过程的介绍，其中包含了一些与微积分内容有关的杰出数学家的事迹，这对提高学生学习微积分的兴趣和启发鼓励学生勇于创新都颇为有益。

四、习题分 A、B 两类。教材每一章末尾的习题均分为 A 和 B 两部分。A 类题是反映按教学大纲要求所有学生必须掌握的内容。B 类题的难度较 A 类题大，是为那些渴望进一步提高的学生准备的。很明显，采用 A、B 题的形式是贯彻因材施教的好措施。

总之，本书是一部具有特色的财经类专业微积分优秀教材。我相信，它的出版将对我国财经高级人才的培养发挥重要作用。

郭大钧

于山东大学南院

2002 年 1 月 8 日

前　言

为适应21世纪人才培养的需要，世界各国都十分重视数学教育的改革。美国在20世纪90年代初就启动了面向21世纪振兴美国数学教育的行动计划，我国前国家教委和各省市教委在高等院校中也纷纷设立了面向21世纪的数学教育改革项目，使数学教育在大学教育中的地位不断加强和提高。数学教育改革之所以会出现一种蓬勃发展的局面，主要原因在于：第一，数学具有解决理论和实际等各种问题的潜在能力；第二，数学素质是大学生应具备的基本素质之一，数学不仅是学习后继课程和求解某种具体问题的工具，而且是一种分析问题、解决问题的实践活动，同时能为其他学科提供强有力的推理方法，是培养和提高理性思维能力的重要载体；第三，数学教育是培养创新思维的重要方法，而创新思维是创新教育的基础，数学教育可以培养和训练学生的类比思维、归纳思维、抽象思维、逻辑思维、形象思维、发散思维、逆向思维和猜测思维，这些都是创新思维的重要方法；第四，数学能为人才竞争中的强者增添有力的翅膀。

2000年1月，山东财政学院有幸成为山东省高等学校数学教学改革试点课程项目的承担单位之一。在山东省教育厅高教处、山东财政学院以及教务处的领导、组织、帮助和关心下，课题组成员对经济数学的课程体系、教学内容以及考评方法的改革，数学教育思想观念的更新，教材的编写，教学方法和手段的现代化，数学实验室建设的可行性，甚至适应新形势下数学师资队伍的建设等等方面都有了一些初步的认识和探索。我们对该项目成果进行初步总结以后，在1994年编写的《经济数学基础——微积分》教材的基础上，经过反复研讨，开始分工组编这本教材。在编写过程中，我们既参照了前国家教委颁布的"高等学校财经专业《经济数学基础——微积分》教学大纲"的要求，又尽可能体现出面向21世纪我们对财经类院校教改课程的一些新的认识、思考和探索。新教材完成以后，首先在山东财政学院本科生中试用了一年。在试用过程中，我们进行了问卷调查，结果表明有95%以上的学生认为此教材的使用效果好或较好。另外，在山东省教育厅高教处的参与下，我们请有关专家对本教材进行了鉴定，专家组对本教材给予了高度评价，并提出了许多宝贵的意见。在充分考虑专家和使用者的意见和建议的基础上，我们再一次对本教材作了精心修改。

概括起来，本教材主要具有以下特点：

1. 充分地保持、吸收和发展了已有教材的优点，使本教材既有学科上的系统性和科学性，又有教学上的灵活性和通用性；既注意内容的选取要适合财经类专业的需要，又尽量避免因引入过多的经济概念而使教与学都感到困难的情况出现。

2. 通过一些数学演示与实验，使得一些抽象难懂的定义和概念变得形象和直观，从而将数学的高度抽象性和客观世界的现实性很好地结合起来，这将有助于提高学生理解抽象问题的速度和能力。

3. 在教学内容中引入有关数学软件，辅以演示与实验来帮助学生理解和掌握"微积分"知识，这既加强了理论教学，又充分发挥了计算机辅助教学功能，并使得以往学习数学的枯燥、难懂、被动的过程变得活泼、轻松和主动起来。

4. 加强了习题与正文内容的协调性和针对性，并适当增加习题难度。每一章后面都精编

了A、B两部分不同类型、不同难度、不同要求的习题。A题是按大纲要求所有学生必须掌握的内容；与A题相比，B题的难度要大一些，主要是为那些渴望再进一步提高的学生准备的。

5. 附录一给出了两个经济数学实验，目的是希望通过经济数学实验，让学生知道如何运用所学的微积分、计算机和相关的一些简单的经济学知识，从实际问题中抽象出数学模型，对模型进行讨论求解，利用解进行定量和定性分析研究，最后得出相应经济结论等解决实际问题的方法和步骤。这对提高学生的应用意识、能力以及兴趣，感受数学的实际应用价值，开阔视野，培养独立思考和解决问题的能力等都颇为有益。

6. 在附录二中还精编了微积分的创立及其发展过程，并包含了一些与微积分内容有关的杰出科学家的事迹，目的是希望学生能全面了解微积分的发展历程，并用杰出科学家的事迹和坚韧不拔的精神来激励鞭策自己，引导启发学生，鼓励学生勇于创新，同时也希望有助于数学课的讲授更加生动有趣和丰富多彩。

根据财经类专业教学大纲的要求，在讲授过程中应讲完本教材除打“*”号以外的全部内容，有一定难度的定理证明、例题和习题等可做适当删减，特别是对B类题可不做要求。至于数学演示与实验及其配套习题应配合教学内容适时地进行，当然，也可根据客观条件有所取舍，或集中为学生演示。

需要说明的是，由于在已有的微积分教材中，都普遍存在重概念、定理、例题等内容而轻习题的情况，因此，在这次编写过程中，我们特别加强了对习题的搜集和编写工作，既确保每章习题能真正与正文内容协调配套，又能符合分层教学的需要，从而照顾到大多数读者的需求。为做好这项工作，我们特别把编写组成员按各人的实际情况分为内容和习题两个教材编写小组。

本书由张金清主编，郝秀梅、陈晓兰、刘太琳副主编，李静芬、刘蒲凰主审。参加教材内容编写的有：刘蒲凰（第一章，附录二）、邱茂路（第二章）、刘纪芹（第三章）、郝秀梅（§4.1～§4.3）、陈景年（§4.4～§4.5）、李静芬（§5.1～§5.5）、安启光（§5.6和经济数学实验一）、陈晓兰（第六章、第八章和经济数学实验二）、马玉林（第七章）；参加教材习题编写的有：刘太琳（习题一）、张慧（习题二）、刘纪芹（习题三）、陈景年（习题四）、安起光（习题五）、孟宪萌（习题六）、张金清（习题七）、陈晓兰（习题八）、韩建新（全书的数学演示与实验习题）。所有的数学演示与实验由韩建新和马玉林完成。

在本教材的编写过程中，我们融集了各方面的智慧，详细地研究了国内外一些相关教材，先后聘请了著名专家叶中行教授、李师正教授、雍炯敏教授来我院讲学、座谈，多次参加了上海交通大学、清华大学组织的数学演示与实验培训班和研讨会。著名数学家郭大钧教授十分支持高等院校的数学教育改革，在百忙中审阅了本书的试用讲义，提出了重要的改进意见，并为本书作序。参加本教改项目和教材鉴定会的各位专家，在对我们的工作给予充分肯定和鼓励的同时，还提出了许多指导性的意见。山东省教育厅高教处、山东财政学院和教务处的领导也给予了我们诸多的指导、关心、帮助和支持。在此，编者向以上各位专家和领导表示衷心的感谢，另外，我们还要感谢山东省教育厅、山东财政学院对本教材的写作和出版所给予的基金资助，没有他们的支持，本教材是无法完成的。

尽管在编写本教材的过程中，我们曾广泛征求意见，反复修改，数易其稿，希望编写出的数学教材能符合高等学校财经类专业的共同要求，但由于时间仓促和水平有限，教材中的疏漏、错误在所难免，恳请各位专家、读者不吝指正。

编　者

目　　录

第一章　极限与连续

大家知道，数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学. 由于事物的发展变化一般都涉及到量的变化，因此，自然科学与社会科学中的诸多问题，都可以用数学这一工具来加以研究. 英国著名哲学家培根曾经说过："数学是科学的大门和钥匙."

同学们在中学阶段已经学习了代数、几何、三角等数学学科的有关知识，这些学科都有一个共同的特点，即它们所研究的对象是不变的量，我们称其为常量，因此，初等数学往往又称作常量数学. 常量数学是描述静态事物的有力工具，但对于客观实践中提出的大量数学问题，如曲线的切线斜率、变速直线运动的速度、曲边梯形的面积等，常量数学却无能为力，这是因为以上问题的解决，需要在变量的变化过程中去研究变量间的相互关系. 在历史上，正是由于对这些问题的深入研究，从而导致数学的发展由常量数学进入了变量数学阶段，它的主要标志之一就是以牛顿和莱布尼兹作为奠基人的"微积分"的创立.

微积分是利用极限方法来研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支. 极限方法是微积分学的理论基础，而连续函数又是微积分学要着重讨论的一类重要函数. 因此，本章在回顾有关函数方面的主要内容后，将主要介绍极限与连续函数的概念，并讨论极限与连续的基本性质等.

§1.1　函　　数

1.1.1　邻域

通常，我们把介于两个实数之间的全体实数称为区间，例如开区间 (a, b)，闭区间 $[a, b]$，半开区间 $(a, b]$，无限区间 $[a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$ 等. 在讨论函数时，我们还要经常研究函数在一点附近的局部性质，为此引入邻域的概念.

定义 1.1.1　设 $x_0, \delta \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$，称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$，点 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

显然

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}.$$

在点 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内去掉中心 x_0 后所成的集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的**空心邻域**，记作 $U^0(x_0, \delta)$，称开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 为点 x_0 的**左邻域**，$(x_0, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的**右邻域**.

1.1.2　逻辑符号

为以后研究问题时书写的方便，我们介绍几种常用的逻辑符号：

"$\forall$"表示"任给"或"每一个";

"$\exists$"表示"存在"或"找到";

"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要"或"等价".

1.1.3 函数

1. 函数的概念

在客观世界中经常遇到变化着的量,例如自然界中的降雨量、温度、水流量,经济领域中产品的产量、产值的增长率、商品的价格、需求量等等,这些变量在变化过程中不是孤立的,它们一般都要受到其他变量的影响.如商品的市场需求量要受到商品价格的影响,随价格的变动而变化,反之,商品的价格也往往受到市场需求量的影响.变量之间的这种相互依赖关系是普遍存在的,我们把这种关系用数学的方法加以抽象和描述,便得到一个重要的概念——函数.

定义 1.1.2 设 D 为一非空实数集,如果存在一个对应规则 f,使对 $\forall x \in D$,都能由 f 唯一地确定一个实数 y,则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**,记作

$$y = f(x),\ x \in D$$

称 x 为**自变量**,y 为**因变量**,集合 D 为 $f(x)$ 的**定义域**,记为 D_f;对于每一个 $x_0 \in D_f$,函数 y 的对应值 y_0 称为 x_0 所对应的**函数值**,记作 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$;全体函数值所构成的集合称为函数的**值域**,记为 Z_f,即 $Z_f = \{y \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$.

函数的表示方法一般有三种:解析法、图像法及列表法.

由定义 1.1.2 可以看出,一个函数由它的定义域 D 和对应规则 f 完全确定,我们将函数的定义域和对应规则称为函数的两要素.对于已知的两个函数,如果它们的定义域和对应规则相同,那么它们就是相同函数,否则就是不同函数.例如,函数 $y = 3 + 2x^4$ 和 $u = 3 + 2v^4$,它们的定义域都是 $D = \mathbb{R}$,且对应规则相同,因此它们是相同函数.由此可见,函数与表示其变量的符号无关.对于函数 $y = \dfrac{5}{x-2}$ 与 $y = \dfrac{5x+5}{(x+1)(x-2)}$,由于它们的定义域不同,所以它们是不同函数.

2. 几种常见函数

(1) 复合函数

在某些实际问题中,两个变量之间的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量作为中间媒介建立起来的.例如,函数 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x + 1$,其中 y 是 u 的函数,u 是 x 的函数.作为两个独立的函数,变量 y 与变量 x 之间并没有联系,但如果将变量 u 作为媒介,将函数 $u = x + 1$ 代到函数 $y = \sqrt{u}$ 中,便得到一个新的函数 $y = \sqrt{x+1}$,我们称函数 $y = \sqrt{x+1}$ 为由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x + 1$ 复合而成的复合函数.

需要指出的是,函数 $u = x + 1$ 的定义域与值域都是 $(-\infty,\ +\infty)$,但函数 $y = \sqrt{u}$ 中要求 $u \geqslant 0$,因而为了使复合函数 $y = \sqrt{x+1}$ 有意义,必须限制 $u = x + 1 \geqslant 0$,即 $x \geqslant -1$.

一般地,有如下复合函数的定义:

定义 1.1.3 设有函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$,如果 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空,即 $Z_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$,则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,并且称 $y = f(u)$ 为**外函数**,$u = \varphi(x)$ 为**内函数**,u 为**中间变量**.

定义中的复合函数是由两个函数复合而成，不难将这一概念推广到多个函数复合的情形. 例如，由三个函数 $y = u^3$, $u = \sin\sqrt{v}$, $v = 1 - x^2$ 复合而成的复合函数是 $y = (\sin\sqrt{1 - x^2})^3$, $x \in [-1, 1]$.

对于复合函数，还要指出以下两点：

① 不是任何两个函数都可以复合.

例如 $y = f(u) = \sqrt{u}$ 与 $u = \varphi(x) = \lg x$, $x \in (0, 1)$，由于 $Z_\varphi = (-\infty, 0)$, $D_f = [0, +\infty)$，因此 $Z_\varphi \cap D_f = \varnothing$，所以，以上两个函数不能复合成一个新的函数.

② 一个复合函数也可以分解成几个简单函数，这一点对于后面的求导运算是非常重要的.

常用的简单函数有：

常量函数　$y = c$;

幂函数　$y = x^a$;

指数函数　$y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$;

对数函数　$y = \log_a x\ (a > 0,\ a \neq 1)$;

三角函数　$y = \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x$;

反三角函数　$y = \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$.

以上六类函数我们称之为**基本初等函数**.

例 1.1.1　函数 $y = (\tan\sqrt{e^x})^4$ 是由哪些简单函数复合而成的？

解　函数 $y = (\tan\sqrt{e^x})^4$ 是由四个函数 $y = u^4$, $u = \tan v$, $v = \sqrt{t}$, $t = e^x$ 复合而成.

(2) 分段函数

在实际应用中经常会遇到这样一类函数，它们的自变量在不同的变化范围内所对应的函数表达式不同，这类函数称为**分段函数**.

例如，绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 及符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

都是定义在$(-\infty, +\infty)$上的分段函数(如图 1-1, 1-2).

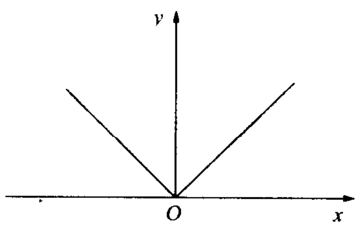

图 1-1

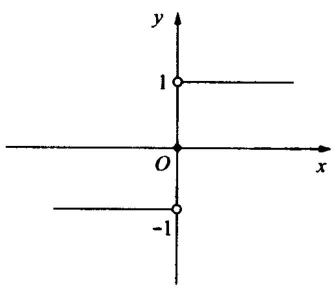

图 1-2

(3) 初等函数

定义 1.1.4　由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所构成的可以用

一个解析式子表示的函数称为**初等函数**.

例如,函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$, $y=\arcsin\frac{x-1}{3}+e^{x^2}$ 等都是初等函数,绝对值函数 $y=|x|$ 可以写成 $y=\sqrt{x^2}$,因此它是初等函数,而符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 不是初等函数.

(4) 显函数与隐函数

一般地,如果变量 y 与 x 的函数关系可直接由 $y=f(x)$ 表示,则称这样的函数为**显函数**,例如 $y=x^2+1$, $y=\sin x^2$ 等;如果变量 y 与 x 的函数关系是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定,则称这样的函数为**隐函数**,例如 $x^2+y^2=1$, $e^y+xy-e=0$ 等.

3. 函数的几种特性

我们所讨论的函数,往往具有一些特殊性质,例如奇偶性、周期性、单调性及有界性等,其中奇偶性与周期性已为大家熟悉,下面简单介绍单调性与有界性.

(1) 单调性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果对 $\forall x_1, x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

① $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$在 D 上**单调增加**;

② $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$在 D 上**单调减少**.

在此定义中,若将 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$ 改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$, 则称 $f(x)$在 D 上**单调不减(单调不增)**. 单调增加、单调减少以及单调不减、单调不增的函数,统称为**单调函数**.

利用定义可以判断一些较为简单的函数的单调性,在本书第三章的导数应用中,将给出判断函数单调性的一种简单方法.

(2) 有界性

定义 1.1.6 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,使对 $\forall x\in D$, 恒有

(1) $|f(x)|\leqslant M$, 则称 $f(x)$在 D 上**有界**,如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在 D 上**无界**;

(2) $f(x)<M$, 则称 $f(x)$在 D 上**有上界**;

(3) $f(x)>-M$, 则称 $f(x)$在 D 上**有下界**.

可以证明,函数 $f(x)$在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在集合 D 上既有上界又有下界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$\mathbb{R}$上是有界函数,因为对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 恒有 $|\sin x|\leqslant 1$; 而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上是无界的,但在区间$[1, +\infty)$上却是有界的. 由此看出,函数的有界性与所讨论的区间有关.

函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上有界的几何意义是:函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上的图象位于以两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 为边界的带形区域内(如图 1-3).

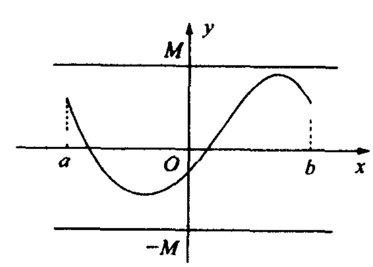

图 1-3

1.1.4 经济分析中几个常用的经济函数

利用数学方法去解决实际问题,需要找出该问题中各变量之间的函数关系. 在经济分析

中,常用的函数有以下几种.

1. 总成本函数

总成本是指生产一定数量的产品所需费用的总和,用 C 表示,它包括固定成本和可变成本两部分.固定成本是指不随产量的变化而变化的那部分费用,用 C_0 表示.例如厂房费用,企业管理费等;可变成本是指随产量变化而变化的那部分费用,用 C_1 表示.例如原材料费、动力费、生产者工资等.

如果用 x 表示产品产量,则总成本函数可表示为

$$C(x)=C_0+C_1(x).$$

常见的成本函数的形式有一次函数和二次函数.

在生产过程中,管理者不仅关心总成本,也非常关注生产单位产品所需的费用,即**平均成本**,平均成本用$\overline{C}(x)$表示,$\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

例 1.1.2 设某企业每年生产某种产品最大产量为 b 个单位,最低产量为 a 个单位.其中,固定费用为 2 000 元,每生产 1 个单位产品成本需增加 70 元,求总成本函数与平均成本函数.

解 设该种产品的年产量为 x 个单位,则总成本函数为:

$$C(x)=2\,000+70x(\text{元}),\ x\in[a,\ b];$$

平均成本函数为

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=70+\frac{2\,000}{x}(\text{元}).$$

2. 总收益函数

总收益是指生产者出售一定数量的商品所得到的全部收入,用 R 表示,总收益一般取决于所出售商品的数量与该商品的价格.如果销售量用 x 表示,价格用$P(x)$表示,那么总收益函数是 $R(x)=xP(x)$.

3. 总利润函数

总利润是指总收入减去总成本后的剩余部分,用 L 表示,总利润函数是

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

例 1.1.3 某企业生产一种商品的总成本为 $C(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{29}{4}$ (单位:千元),如果该商品的单价为$\dfrac{13}{8}$千元,试求

(1) 该商品的总利润函数;

(2) 出售 4 件及 16 件商品的总利润.

解 (1) 由已知得出售该商品 x 件的总收益是 $R(x)=\dfrac{13}{8}x(\text{千元})$.

因此该商品的总利润函数是

$$L(x)=R(x)-C(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{33}{8}x-\frac{29}{4}(\text{千元}).$$

(2) 出售 4 件及 16 件商品的利润分别为

$$L(4)=-\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{33}{8}\times 4-\frac{29}{4}=5\frac{1}{4}(\text{千元});$$

$$L(16)=-\frac{1}{4}\times 16^2+\frac{33}{8}\times 16-\frac{29}{4}=-5\frac{1}{4}(\text{千元}).$$

盈亏分析 一般情况下,大家会认为出售的商品数量越多,企业所获得的利润就越大,但从例 1.1.3 可以看出,企业所获利润并不是随销售量的增加而增加,在一定的时候,销售的收入会低于生产成本,这时企业非但没有获取利润,反而出现亏本现象.因此在企业的经营管理中,需要进行生产的盈亏分析.由总利润函数可知:

当 $L(x)=R(x)-C(x)>0$ 时,企业盈利;

当 $L(x)=R(x)-C(x)<0$ 时,企业亏损;

当 $L(x)=R(x)-C(x)=0$ 时,企业既不盈也不亏.

通常称使 $L(x)=0$ 的点 x_0 为**盈亏平衡点(又称保本点)**.

在例 1.1.3 中,由 $L(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{33}{8}x-\frac{29}{4}=0$ 得盈亏平衡点分别为 $x_1=2$ 与 $x_2=14\frac{1}{2}$. 从图 1-4 中可以看出,当 $2<x<14\frac{1}{2}$ 时,收入高于成本,企业盈利;当 $x<2$ 及 $x>14\frac{1}{2}$ 时,成本超过收入,企业亏损.

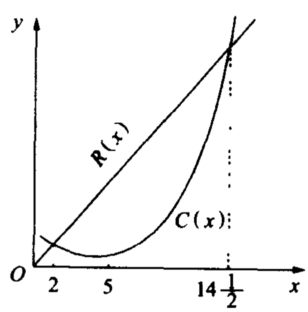

图 1-4

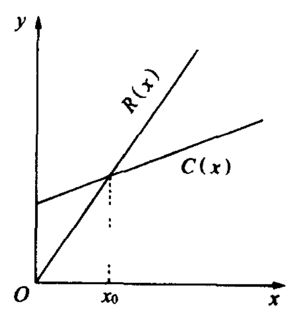

图 1-5

为了扭转亏损状态,企业可以通过降低成本或调整售价得到新的成本函数或收益函数,以重新找到新的盈亏平衡点,从而使企业达到扭亏增盈的目标.

在上例中,成本函数是二次函数.如果成本函数为一次函数 $C(x)=C_0+C_1x$, 收益函数为 $R(x)=Px$, 则由利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=(P-C_1)x-C_0=0$ 得盈亏平衡点为 $x_0=\frac{C_0}{P-C_1}$. 从图 1-5 看出,当 $x<x_0$ 时企业亏损, $x>x_0$ 时企业盈利.

例 1.1.4 某企业生产一种汽车配件,设每天生产 x 件的成本为 $C(x)=3\,000+80x$(元).

(1) 若售价为 120 元/件,问每天应销售多少件才能使收支平衡(或才能保本)?

(2) 若每天至少能销售 100 件,问每件销售价定为多少就可保证不亏本?

解 (1) 由题设知,收益函数 $R(x)=120x$,
因此,利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=40x-3\,000$.