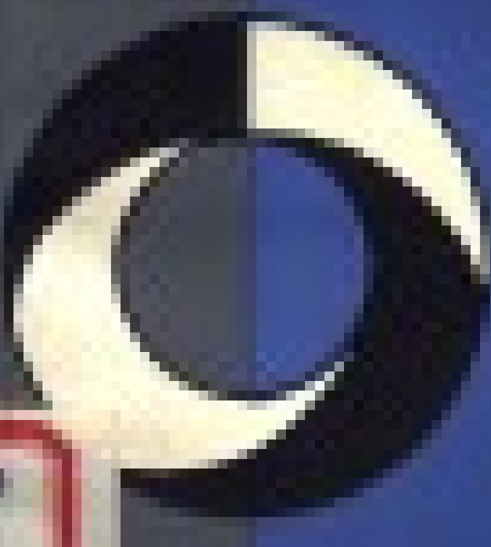
高等学校教学用书

拓扑学

余玄冰　王敬庚　蒋人璧 编

北京师范大学出版社

拓扑学



高等学校教学用书

拓 扑 学

余玄冰 王敬庚 蒋人璧 编

北京师范大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了一般拓扑学最基础的知识. 内容包括：点集拓扑的基本概念——拓扑空间；连续与同胚；子空间、积空间和商空间；紧致性及连通性. 用代数方法研究拓扑空间的初步知识——基本群和覆迭空间. 各章均配有难易适度的习题.

此书可供高等院校、高等师范院校数学系本科作教材使用，也是一本适于自学的教材.

高等学校教学用书

拓 扑 学

余玄冰 王敬庚 蒋人璧 编

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.375 字数：154 千
1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—2 500

ISBN 7-303-00866-7/O·128
定价：1.55 元

前　　言

本书是在1983年11月初版余玄冰编译的《点集拓扑》(根据 James Dugundji. Topology) 基础上，经过多次教学实践，并参考了：

James R. Munkres 的 "Topology A First Course"; Fred H. Croom 的 "Basic Concepts of Algebraic Topology"; H. Spauier 的 "Algebraic Topology." 李元熹、张国樑编的 "拓扑学"; 孙以丰先生所译 M. A. Armstrong 的 "基础拓扑学" 及熊金城先生所编 "点集拓扑讲义" 等，重新编写的。

其特点是：删去了原 "点集拓扑" 中集合论、度量化定理、滤子等过于专门化的部分，增加了基本群和覆盖空间的内容，使全书对拓扑学的基本思想及方法有一个完整的描述。从讲授方法上，首先在引言 "从橡皮几何学到拓扑学的演变" 中，向读者介绍了拓扑学发生发展的背景。各章、各节也都注意给出定义、定理的背景及目的。在 "商空间" 一章中，介绍了足够多的拓扑空间模型以利于直观想像。此外，在原书基础之上，各章重新配备了难易适当的习题。

所有这一切改变，都是为了用尽可能短的时间，使读者尽快入门，以适应国内实情。

本教材实际上在我系本科生中已经作过数次讲授，证明用一个学期每周4学时的时间，能顺利完成。

特此奉献此书给读者，以利于学习和交流。

编　者

1988. 11.

目　　录

从橡皮几何学到拓扑学的演变
——引言

早期的拓扑学，被称为“橡皮几何学”．它研究图形在橡皮变形之下不变的性质．所谓橡皮变形，是指把图形想像为橡皮物，可以拉伸或收缩．但有两个条件，一是不能拉破，二是任二点不能粘合．如（图 1）：

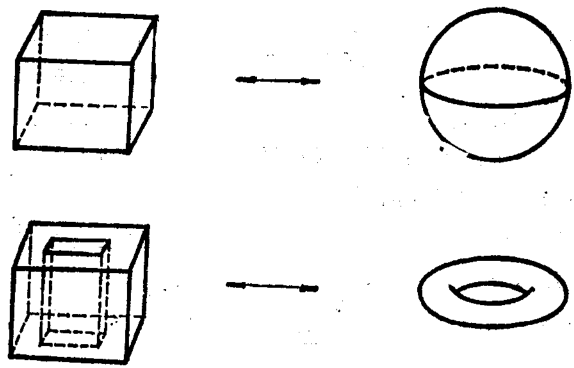


图 1

用数学语言来描述时，说成是存在两个图形之间的“连续”的满单射，并且这个映射的逆映射也是“连续”的．从直观上去看，说经过橡皮变形的图形是互相“同胚”的．在同胚变形中保持不变的性质称为“同胚不变性”．促使早期的数学家们对研究同胚不变性产生极大的兴趣当然有其各方面的背景．

以下两个历史上著名的数学难题就是这种背景之一.

1. 七桥问题.

(图 2) 表示在两河交汇之处形成四个岛 A, B, C, D.河

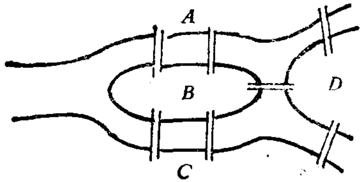


图 2

上有七座桥. 有人问, 能否从一岛出发, 恰好经过每座桥一次而走遍四个岛? 欧拉 (Euler) 把这一具体问题抽象成"网络"理论来研究,其中有一个结论和七桥问题有关,即: "若一个网络有两个以上的奇顶点(指顶点处伸出奇数个弧端), 则它不能被单一的路径所贯穿."若将(图 2)抽象成网络(图 3),立即可知对所提问题的回答是否定的. 问题的关键是顶点的奇偶性及个数. 若把网络看成橡皮物,那么,顶点的奇偶性及个数显然是同胚不变性.

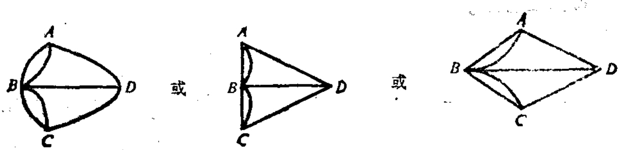


图 3

2. 地图问题

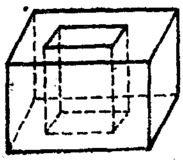
一张平面地图,最少用几种颜色着色,就能确保相邻两省

有不同的颜色？解决这个问题的过程是：首先证明了六色即可；然后进一步改进到五色．（至于四色，一直到本世纪 70 年代才解决，方法是通过计算机的大量计算．）

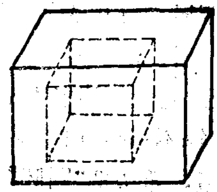
六色或五色问题的解决都是根据平面地图的欧拉定理："一张连通的平面（或球面）地图的顶数、边数及面数的交错和等于 2."（记成 $v-e-f=2$.）

同样的，若把平面地图想像成橡皮物，那么，欧拉数 2 应该是属于平面（或球面）的本质特征之一，即同胚不变性．

欧拉又进一步发现（图 4）所示各种图形的欧拉数如下：



$v-e-f=0$



$v-e-f=4$

图 4

按照橡皮几何学的观点，欧拉数 0 被看成是属于以环面为代表的一类图形的特征；而欧拉数 4 则被看成是属于以同心球面为代表的一类图形的特征．

于是，如何寻找更多的同胚不变性及对图形进行同胚分类，就成为数学家们所关心的两大课题．

但是，一个简单的例子动摇了"橡皮几何学"的传统观念．（图 5）中的 M 表示由一个纸带扭转半圈再将两边相粘得到的图形，叫做 Möbius 带；而 M' 表示一个纸带扭转一圈半之后再相粘得到的图形；

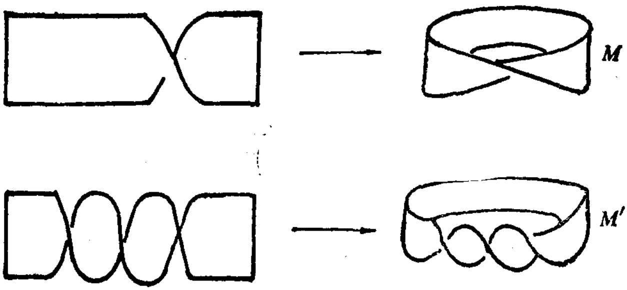


图 5

很明显，M和 M' 之间存在一个点到点的满单射，而且，从直观上看，M和 M' 之间的形变是连续的．可是，如果通过橡皮变形，是绝不可能把M变成 M' 的(相反也一样)．那么，M和 M' 算不算是互相“同胚”的两个图形呢？这就导致一个新的愿望，希望把“同胚”从作为“橡皮变形”的直观定义中解脱出来，加以推广。

在集合论的影响下，所考虑的对象——“图形”被推广到任意“点集”．紧接着考虑的问题是怎样描述两个集合间的映射的连续性？

古典分析中，$f:R^n \to R$ 在 x_0 点连续，被定义为“$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.”这种描述，是用与度量有关的语言进行的．但在一般集合中，未必有度量概念． 于是把以上描述改为集合的语言，即：“说 f 在 x_0 点连续，如果 $\forall f(x_0)$ 的邻域 $B(f(x_0), \varepsilon)$，$\exists x_0$ 的邻域 $B^n(x_0, \delta)$，使得 $f(B^n(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$．”

在 R^n 中，球形邻域 $B^n(x_0, \delta)$ 是一种“开集”，直观上 R^n

就被看成是由无穷个开集编织在一起的一种结构． 不难验证，任意个（可数或不可数）开集的并集仍为开集；有限个开集的交集仍为开集．如果在任意集合中取出一个子集族，它对集合的任意个并及有限个交这两种运算也是封闭的话，很自然就可以把它看成是 R^n 中开集结构的推广．有了这种结构的集合就被称为“拓扑空间”（因为我们称 R^n 为“空间”）． 这就得到了讨论两个集合间映射连续性的基础．

以上即“橡皮几何学”到“拓扑学”的演变．

第一章　预备知识——集合和映射

我们假定读者已经具有初等集合论的一般常识．这里只将本课程中要用到的有关集合和映射的部分内容列出，作为预备知识，供读者参考．它不是关于集合论的系统而完整的论述．

§1　集合及其运算

关于集合、集合的相等、子集、集合的包含关系，集合的并($\cup$)，集合的交($\cap$)及卡氏积 $A\times B$ 等等最基本的知识，肯定读者已经相当熟悉，不再列出．

1.1 定义　若对非空集合 $\mathscr{A}$ 的每一个元素 α，都对应一个集合 A_α，则所有这些 A_α 的全体称为一个**集族**，记为 $\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$．集合 $\mathscr{A}$ 称为指标集．指标集 $\mathscr{A}$ 可以有限，也可以无限，并且不要求不同的指标对应不同的集合．

集族 $\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 的并 $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in\mathscr{A}$，使得 $x\in A_\alpha\}$．

集族 $\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 的交 $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in\mathscr{A}$，使得 $x\in A_\alpha\}$（记号 $\exists$ 读作"存在"，$\forall$ 读作"对于每一个"）．

例 1　对于任一集合 X，有 $X=\bigcup\limits_{x\in X}\{x\}$，即任一集合 X

可以看作是由所有只包含X中一个元素的集合组成的集族的并。这个集族表示为$\{\{x\}|x\in X\}$，指标集就是X自己。

1.2 定理 集族的运算适合下列运算律:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha}$ 和 $\bigcap\limits_{\alpha}$ 都适合交换律和结合律

若指标集 $\mathscr{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in\mathscr{L}}\mathscr{A}_\lambda$，则有

$$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=\bigcup_{\lambda\in\mathscr{L}}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}_\lambda}A_\alpha\Big),$$

$$\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=\bigcap_{\lambda\in\mathscr{L}}\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}_\lambda}A_\alpha\Big).$$

(2) $\bigcap$ 对 $\bigcup\limits_{\alpha}$ 及 $\bigcup$ 对 $\bigcap\limits_{\alpha}$ 的分配律

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\Big)\cap\Big(\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}}B_\beta\Big)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(A_\alpha\cap B_\beta),$$

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\Big)\cup\Big(\bigcap_{\beta\in\mathscr{B}}B_\beta\Big)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(A_\alpha\cup B_\beta).$$

(3) De Morgan 律

设A是X的子集，差 $X-A=\{x\in X$ 但 $x\notin A\}$ 记为$\mathscr{C}A$，称为A在X中的余集.

若A_α都是X的子集，余集都是相对于X取的，则

$$\mathscr{C}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}(\mathscr{C}A_\alpha),$$

$$\mathscr{C}\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}(\mathscr{C}A_\alpha).$$

(4) 幂等律

若 $\forall\alpha\in\mathscr{A}$，$A_\alpha=A$，则 $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha=A$。

(5) 卡氏积×对∪，∩，−的分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C).$$

卡氏积×对 $\bigcup\limits_{\alpha}$，$\bigcap\limits_{\alpha}$ 的分配律

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}}B_\beta\right)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(A_\alpha\times B_\beta),$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha\right)\times\left(\bigcap_{\beta\in\mathscr{B}}B_\beta\right)=\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}}(A_\alpha\times B_\beta).$$

(6) $A,B\subset X$，则 $A-B=A\cap\mathscr{C}B$.

因此，虽然"差"没有很好的算律，但它可以化作"余"和"交"进行运算。

1.3 附注 至今，我们都假设指标集 $\mathscr{A}\neq\phi$. 但若允许 $\mathscr{A}=\phi$，则可以带来形式上的方便.

$\forall\alpha\in\mathscr{A}$，设 A_α 都是集合 X 的子集，则称 $\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 为 X 的子集族.

若 $\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 X 的子集族，且 $\mathscr{A}=\phi$，则我们规定

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\phi}A_\alpha=\phi$,

(2) $\bigcap\limits_{\alpha\in\phi}A_\alpha=X$.

上述结果也可以由集族的并与交的定义当 $\mathscr{A}=\phi$ 时推导出.

对于(1)：若 $\bigcup\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha \neq \phi$，则 $\exists x\in \bigcup\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha$，由定义，$\exists\alpha\in\phi$ 使得 $x\in A_\alpha$。但"$\exists\alpha\in\phi$"是不可能的，即这样的 x 不可能有，所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha=\phi$。

对于(2)：若 $\bigcap\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha \neq X$，则 $\exists x\in X$，但 $x\bar{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha$。由定义，$\exists\alpha\in\phi$ 使得 $x\bar{\in} A_\alpha$，同样有"$\exists\alpha\in\phi$"是不可能的，即这样的 x 不可能有，所以 $\bigcap\limits_{\alpha\in\phi} A_\alpha=X$。

上述等式(1)和(2)今后常常会用到。

1.4 定义 设 X 是任一集合，X 的所有子集组成的集合，叫做 X 的**幂集**。记为 $\mathscr{P}(X)=\{A|A\subset X\}$。

例 2 设 $X=\{0,1\}$，则 $\mathscr{P}(X)=\{\phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$。

例 3 设 $X=\{a\}$，则 $\mathscr{P}(X)=\{\phi,\{a\}\}$。

例 4 对于任意集合 A，$\phi\in\mathscr{P}(A)$，$A\in\mathscr{P}(A)$。

例 5 $B\subset A$，等价于 $B\in\mathscr{P}(A)$。

§2 映 射

读者已经熟悉关于映射的通常的定义。这里再用集合的概念来定义映射，使映射和它的图象等同。

2.1 定义 设 X，Y 是两个集合，从 X 到 Y 的一个**映射** $f:X\to Y$ 是 $X\times Y$ 的一个子集 f，适合以下条件：$\forall x\in X$，$\exists$ 唯一的 $y\in Y$，使得 $(x,y)\in f$（图 1-1），集合 X 和 Y 分别称为映射 f 的**定义域**和**值域**。

我们用 $y=f(x)$ 来表示 $(x,y)\in f$，并且说 f 在 x 上取值 y，或者说 y 是 x 在 f 之下的象，或者说 f 送 x 到 y。