中等专业学校

工科专业试用教材数学第三册

教学参考书

辽宁省中等专业学校数学教学参考书编写组编

高等教育出版社

中 等 专 业 学 校

工科专业试用教材数学第三册

教 学 参 考 书

辽宁省中等专业学校数学教学参考书编写组编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

江苏盱眙印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 7 2/16 字数 147,000

1980 年 5 月第 1 版 1986 年 2 月第 9 次印刷

印数 114,301—122,500

书号 13010·0467 定价 1.05 元

编 者 的 话

这本教学参考书是根据中等专业学~~校试用教材~~《数学》第三册(工科专业通用课本,人民教育出版社 1979 年 12 月第 1 版)的内容编写的,专供有关教师在教学中作参考用.

本书按照《数学》第三册的目录顺序分章编写,每一章都包括以下三个主要部分:

Ⅰ 目的要求 这是编者根据部颁工科中专数学教学大纲(试行草案)的精神和各章教学内容提出的.

Ⅱ 教材说明 这是编者根据对教材的体会和一般教学经验提出的. 它包括有:教材的主要精神;课文内容的分析;教学的重点和难点;教学时数分配;教学中应注意的事项;教法建议以及习题课的安排等项.

Ⅲ 部分习题解答或提示 对各章、节的习题中较难的题目做了详细的解答或简要的提示.

此外,有些章的最后部分还适当编写了"附录",这是编者针对教学上的需要,写出来供教师参考的.

编写本书时,力求适合一般工科中专的教学需要,但因各校的具体情况不同,专业设置又不一样,教师还需要从实际出发,灵活运用本书所提供的资料.

本书由鞍山钢铁学校张景华同志主编,参加编写工作的有:鞍山钢铁学校佟德成、张文生,沈阳黄金专科学校郑宏业,鞍山运输学校王福琛,本溪钢铁学校张炎生,沈阳铁路机械学校康金铁等同志. 沈阳师范学院数学分析教研室主任武

云翔同志对本书进行了仔细的审阅和修改.

由于编写时间比较仓促，并且编者对于编写中专数学参考书缺乏经验,这个尝试性的参考书一定有很多缺点,希望广大读者提出批评和建议,以便将来修订时改正.

辽宁省中专数学教学参考书编写组

一九八〇年四月

目　录

第十三章　极限与连续 …… 1
I　目的要求 …… 1
II　教材说明 …… 1
§13-1～5　分节说明 …… 4
习题课 …… 21
III　部分习题解答或提示 …… 25
第十四章　导数 …… 29
I　目的要求 …… 29
II　教材说明 …… 29
§14-1～10　分节说明 …… 31
习题课 …… 39
III　部分习题解答或提示 …… 45
附录 …… 50
一．相关变化率 …… 50
二．关于复合函数求导法则证明的补充 …… 52
第十五章　导数的应用 …… 54
I　目的要求 …… 54
II　教材说明 …… 54
§15-1～3　分节说明 …… 57
习题课(一) …… 63
§15-4～5　分节说明 …… 68
习题课(二) …… 72
§15-6　说明 …… 73

Ⅲ 部分习题解答或提示……75
附录……82
一．关于极值的第二判别法……82
二．关于曲线的斜渐近线……83
第十六章 微分及其应用……87
Ⅰ 目的要求……87
Ⅱ 教材说明……87
§16-1～2 分节说明……88
习题课……94
§16-3 说明……97
Ⅲ 部分习题解答或提示……100
附录……105
一．由参数方程所确定的函数的微分法……106
二．曲率圆在曲线运动中的应用……106
第十七章 不定积分……109
Ⅰ 目的要求……109
Ⅱ 教材说明……109
§17-1～3 分节说明……111
习题课(一)……118
§17-4～6 分节说明……124
习题课(二)……131
Ⅲ 部分习题解答或提示……137
附录……143
一．第二换元公式的理论证明……143
二．无理函数积分法的补充说明……144
三．三角函数有理式积分法的补充说明……145
第十八章 定积分及其应用……147

Ⅰ　目的要求 …… 147
Ⅱ　教材说明 …… 147
§18-1～7　分节说明 …… 149
习题课 …… 167
*§18-8　说明 …… 172
Ⅲ　部分习题解答或提示 …… 177
附录 …… 182
定积分的有关历史资料简介 …… 182
第十九章　微分方程 …… 185
Ⅰ　目的要求 …… 185
Ⅱ　教材说明 …… 185
§19-1～3　分节说明 …… 187
习题课 …… 195
§19-4～5　分节说明 …… 199
Ⅲ　部分习题解答或提示 …… 205

第十三章 极限与连续

I 目的要求

1．在复习函数概念的基础上，使学生牢固掌握五个基本初等函数的定义、性质和图象；搞清楚复合函数、初等函数的概念；了解函数的几种特性，并学会建立简单的函数关系式．

2．正确理解无穷小量的定义和性质，以及它和无穷大量之间的关系．

3．正确理解极限的概念，熟练地掌握极限的运算法则，要注意培养学生对极限理论的运用及对极限运算的基本技能．

4．正确理解函数的连续性和间断点的概念，了解初等函数的连续性，掌握求极限的几个基本方法，会求一般函数的极限．

5．结合极限理论的教学，注意说明极限是以运动的、有联系的以及量变引起质变的观点来研究量的变化的一种方法，借此对学生进行辩证唯物主义观点的教育．

II 教材说明

从这一章起，学习内容进入高等数学的微积分部分，微积分所研究的主要对象是函数，为了能够比较深入地研究一般函数，必须引用新的工具，这个工具就是极限理论．我们知

道，一种科学，因为改变了研究的方法．就可能得到很大的进步和发展．正是由于极限理论的成立和发展，才使近代科学的数学方法更加趋于精密和完善．这是值得作为开场白让学生们注意的．

在微积分中，今后我们常用到的函数，主要是初等函数．所以，本章教材首先对基本初等函数与初等函数进行复习和总结．所谓初等函数是由 §13-1 第二段中所指出的那五类基本初等函数组成的。学生对基本初等函数的性质和图象应该非常熟悉，否则进一步研究初等函数时将产生困难．

无穷小量与无穷大量是描述量的变化状态的术语．我们讲极限理论，就要用到它们，尤其是无穷小量与极限概念更是密切相关．所以本章在第二节先讲无穷小量与无穷大量，准备借助于它们来建立极限概念．

教材接着就讲函数极限的概念以及极限的运算法则，极限的理论是本章教材的重点，这是因为微积分的其它基本概念(如导数、积分等)都是在极限理论的基础上建立起来的，并且解析运算(微分法、积分法)也都是用极限运算来描述的．所以掌握好极限理论和极限运算是十分重要的．当然这也是本章教材的难点之一，因为我们要用辩证的观点来研究量的变化，例如 $x \to x_0$ 就是 x 可以无限接近定值 x_0，但 $x \neq x_0$，这对学生来说一开始是不容易理解的，再涉及到有限与无限，量变到质变的辩证关系，就更不容易领会了．

本章教材最后一节扼要地阐述了函数的连续性，我们所以必须研究连续函数，不仅因为在实际应用中总要碰到这一类函数，并且也因为对其它更广泛的函数的研究，在很大程度

上都要归结到连续函数的研究上来.

"连续"与"间断"是一对矛盾，教材最后介绍了函数的间断点(主要是第一类间断点)，通过连续与间断的对比，加深学生对连续函数的理解.

本章教材的另一个难点是分段函数，因为这是过去从未接触过的新的函数表示形式，特别是利用左、右极限验证分段函数在某点处是否连续的问题，学生很不容易领会. 教材已注意到把难点分散，首先在第一节第四段例题中简单地提出了分段函数的概念，在讲左、右极限时又举分段函数的例子，后来在函数的间断点这一小段中，再利用左、右极限验证分段函数的间断点问题. 教材处理上的这些措施是必要的. 但应当指出，解决这个问题的关键是教师在讲解函数概念时，要注意说清函数定义的第一条要素(见教材第二页)是与用什么方法给出"对应法则"无关的，可以用任何可能的方法给出对应法则. 而分段函数只不过是给出它的对应法则的方法有特殊性而已，但按函数定义来衡量，它的确符合条件，因而是一个函数. 因此，我们觉得只要抓住"可以用任何可能的方法给出函数的对应法则"这一点，在讲解函数定义的过程中，对它着重加以说明，而在讲解分段函数时又紧扣这一点，说明按函数定义它确实是一个函数，这样就很可能消除学生对分段函数的疑虑.

本章教学时间按教学大纲规定为 22 课时，具体分配如下，以供参考：

§ 13-1	基本初等函数与初等函数	5 课时
§ 13-2	无穷小量与无穷大量	3 课时

§ 13-3　函数极限的概念　4课时
§ 13-4　极限的运算　4课时
§ 13-5　函数的连续性　4课时
习题课(或复习小结)　2课时

§ 13-1　基本初等函数与初等函数

1．基本初等函数的表示法和一些主要性质，都是在第一、二册里已经学过的，教材在这一节中，只是为了复习而扼要叙述一下，但这些内容很重要，学生对它理解和掌握的情况如何，对以后内容的学习影响很大．因此首先要摸清学生过去的学习情况(特别是招收的高中生，也就是入学以后一开始便学第三册的学生)，应该根据学生的实际情况，制订这部分内容的复习或补习的课时计划．在教学方法上，一般可以采用问答式．首先要强调函数概念中最基本的两个要素：对应法则与定义域，这两者之中又要以更大的注意力集中于对应法则，当我们讲到函数 $f(x)$ 时，常有两层意思，有时是指对应关系 f，有时是指因变量，前者侧重于对应，后者侧重于对应值．而函数概念的完整叙述，还是要讲清两个基本要素．然后，重点围绕五类基本初等函数，要分别指出它们的定义域、值域和图象的特征，要求学生都能明确牢记这些内容．

2．初等函数的特性分析很重要，也较困难，有些特性需要今后进一步学习和探讨，这里主要借助于几何直观来掌握，并在已学过的基本初等函数一些特性的基础上，用比较严格的数学语言（即以正式定义给出的那些叙述）来表达这些特性．

3．复合函数的定义，不容易一下子讲明白，如果把它看做是五类基本初等函数之间除四则运算以外的一类运算来讲，可能好懂一些．例如，$y=\lg\sin x$ 是自变量 x 的正弦函数的对数函数，可把它看作是由两个函数复合而成的，它可分解为 $y=\lg u$，$u=\sin x$ 的复合形式．又如：$y=\cos^3 x$ 也可看成复合函数，它由 $y=u^3$，及 $u=\cos x$ 复合而成，$y=\sqrt{x^2-1}$ 也可看作复合函数，它由 $y=\sqrt{u}$，及 $u=x^2+1$ 复合而成．因此，我们可以把象上面那样由两个函数复合而成一个函数的过程看作一种运算，并称之为复合运算．引入复合运算这一概念，对学生理解复合函数概念可能有好处．

复合函数不仅可以由两个函数，也可由更多的函数复合而成．例如 $y=\lg(1+\sqrt{1-x^2})$ 就是由四个函数：$y=\lg u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{z}$，$z=1-x^2$ 复合而成的复合函数．教材在分析复合函数的复合过程已安排了适当的例题和习题，应该让学生多加练习．要能熟练地将几个简单的函数复合起来，又能熟练地将一个较复杂的函数分成几个较简单的函数，这是今后进行微积分运算所需要的基本功之一．

4．讲完初等函数定义后，建议酌情补充以下一些内容．

（1）初等函数的分类：

1° 有理整函数（或多项式）

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

这里的 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常量，n 是自然数，当然这一函数的定义域为 $(-\infty, \infty)$．

2° 有理分函数是由两个多项式相除所得的商

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

这种函数的定义域是除去使分母为 0 的 x 值以外的一切实数.

有理整函数与有理分函数统称有理函数.

3° 对于 1°, 2° 所定义的函数，再加上对变量作开方运算所得的函数，叫做无理函数.

有理函数与无理函数统称为代数函数.

4° 除代数函数外，其他初等函数都叫做初等超越函数.

(2) 函数的定义域. 定义域是构成函数的两个要素之一，应该要求学生细心地弄清楚初等函数的定义域. 一般在求函数的定义域时，能认清下列几点，就会减少困难避免错误(最好结合例子讲).

1° 在实际问题中，必须考虑变量的实际意义.

2° 在函数解析式的研究中，必须考虑数值计算是否合理：

① 偶次根号内的数，必须大于或等于零；

② 分母不能为零；

③ $\log_a u$ 中的 u 必须大于零；

④ $\arcsin u$ (或 $\arccos u$)中的 u，其绝对值必须小于或等于 1.

因为定义域是函数概念的要素之一，考虑到学生已有第一册数学的基础，可以提出一些习题，作为课内外复习用. 例如：

[1] 求函数 $f(x)=\dfrac{10x}{x^2-2}$ 的定义域并求 $f(2)$, $f(-2)$,

$f(-a)$，$f(a^2)$.

［2］ 求函数 $f(x)=x^4-3x^2+\frac{1}{x^2}$ 的定义域并验证 $f(-1)=f(1)$ 及 $f(-a)=f(a)$ $(a\neq 0)$.

［3］ 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $[0, 1)$

(2) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$ $\left[\frac{4k-1}{4}\pi, \frac{4k+1}{4}\pi\right]$

(3) $f(x)=\frac{1}{\lg(1-x)}$ $(x<1$, 但 $x\neq 0)$

(4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$ $x\in\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in J\right\}$

(5) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$ $[-1, 1]$

对于一些较复杂的函数的定义域，不必要求学生去求，以免增加学生负担.

5. 关于建立函数关系式，一般说有了解代数方程应用题中列方程的基础，不会有什么困难. 教材在这里只举一些简单的实例，作为建立函数关系式的初步练习. 通过例题的讲解，可以引导学生总结出建立函数关系式的一般方法步骤：

(1) 分析问题中哪些是变量，哪些是常量，并将各量分别用不同字母表示.

(2) 根据问题所给的几何条件或物理规律，找出变量之间的关系式.

(3) 根据所给条件，确定关系式中需要确定的常数的数

值或消去式中出现的多余的变量.

6．在第五段例 5 中出现了分段函数，这里应该提醒学生特别注意，函数在用解析式表示时，对于自变量的一切值，两个变量间的对应法则不一定用一个解析式给出，可能会遇到例 5 这种情形，对于自变量的某一部分数值，对应法则用某一解析式，对于另一部分数值，用另一解析式．例如

$$y=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & \text{当 } x>1\end{cases}$$

是确定在区间 $[0,+\infty)$ 上的一个函数，当自变量 x 取区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值 y 由公式 $y=2\sqrt{x}$ 计算；当 x 取区间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，y 由公式 $y=1+x$ 计算，它的图形如图 13-1．我们把这样表示的函数叫做分段函数．下面讲极限与连续时，还要对分段函数作进一步研究．关于分段函数的讲解问题，可参阅前面教材说明．

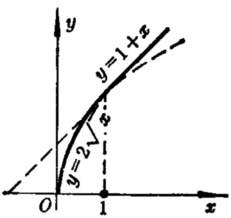

图 13-1

§13-2　无穷小量与无穷大量

1．教材中无穷小量的概念是通过几个具体事例引入的，并提出无穷小量这个名称的抽象定义，一般说来学生还是比较容易接受的．教材在定义无穷小量后提出两点注意需要特别强调，一是对定义中的“ε”的性能要搞清楚，二是要明确“无穷小量”这个词不表示量的大小，它只表示量的变化状态（如定义所说的），也就是无穷小量是变量，不是常量，常量中只有

零可以看做无穷小量.

2. 在无穷小量的定义中有一个缺点,就是变量 α 在它的变化过程中,其绝对值从“某一时刻”开始……,这里只笼统地提出某一时刻而没有把那个时刻的数值指出来,就数学的观点讲,这是不明确或者说是不够严密的. 因此在大专数学教材中,都采用“$\varepsilon-\delta$”定义(这种比较精确的定义,教师们都知道,不必另作介绍). 不过我们认为工科中专学生讲解无穷小量的定义以及下面要讲到的极限定义,都应该力求浅显易懂,着重于概念的实质和运用,而不必着重于表达概念形式的严格性.

3. 判断一个变量是不是无穷小量,这里我们要求从变量的变化趋势直观地加以判别,或者根据无穷小量的定义来验证,如教材中例 3 那样就行.

4. 无穷小量的基本性质,也就是无穷小量的运算,其中性质 1,必须注意“有限个”是不可少的条件,如果无穷小量的个数无限地增多,这个性质就不能成立. 下面的例子可以帮助我们理解这个论断.

设 $x_1=\frac{1}{n^2}, x_2=\frac{2}{n^2}, x_3=\frac{3}{n^2}, \cdots, x_n=\frac{n}{n^2}$, 则当 n 无限增大时, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n 都是无穷小量. 但它们的和

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\to\frac{1}{2}$$

所以这个和就不是无穷小量,这也是量变要引起质变的一个例子.

5. 无穷小量与无穷大量的关系定理,在极限运算中是很

有用的，它指出无穷小量与无穷大量之间有一种简单而明显的互为倒数关系．也就是无穷大量的倒数是一个无穷小量；无穷小量（在变化过程中永不为0）的倒数是一个无穷大量．如果时间允许，为了加深对无穷小量和无穷大量定义的理解，也可以对关系定理证明一下．

［证］ 给定任意小的正数 ε，由无穷大量的定义得知

$$|y|>\frac{1}{\varepsilon}(=N)$$

在某一时刻以后总能成立；根据不等式性质，可以推出下列不等式：

$$\frac{1}{|y|}<\varepsilon \quad 或 \quad \left|\frac{1}{y}\right|<\varepsilon$$

这正说明$\frac{1}{y}$是无穷小量．

反之，取定任意大数 N，由无穷小量定义得知

$$|y|<\frac{1}{N}(=\varepsilon)$$

在某一时刻以后总能成立；因为 $y\neq 0$，于是可推出下列不等式：

$$\frac{1}{|y|}>N \quad 或 \quad \left|\frac{1}{y}\right|>N$$

这正说明$\frac{1}{y}$是无穷大量．

§13-3 函数极限的概念

1．函数的极限是一个数，同时，也是描述函数变化状态的一个术语．因为在高等数学中，通常所研究的函数有两个